

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ГОУ ВПО «Татарский государственный гуманитарно-педагогический  
университет»

---

## УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ДЛЯ СТУДЕНТОВ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ

КАЗАНЬ 2010

Печатается по решению учебно-методической комиссии математического факультета Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

УДК 510(023)(076.8)  
ББК 22.141я73

**У91 Уравнения, неравенства и их системы. Методическое руководство для студентов математических факультетов. Часть 2. Изд. 2-е, перераб. – Казань: ТГГПУ, 2010, - 108 с.**

Учебно-методическое пособие содержит основной теоретический материал, разобранные примеры, упражнения для закрепления умений решать уравнения, неравенства и их системы. Также подобраны индивидуальные домашние задания по возрастающему уровню сложности.

Данное учебно-методическое пособие может быть использовано на математических факультетах вузов и преподавателями средних учебных заведений.

**Составители:** Л.Р. Шакирова, доктор педагогических наук, профессор (часть 1);  
Н.В. Тимербаева, кандидат педагогических наук, доцент (части 2 и 5);  
Э.И. Фазлеева, кандидат педагогических наук, доцент (части 3 и 4)

**Научный редактор-** Шакирова К.Б., кандидат педагогических наук, профессор

**Рецензенты:** Садыкова Е.Р., кандидат педагогических наук, доцент (ТГГПУ);  
Бадриев И.Б., доктор физико-математических наук, профессор (КГУ)

ISBN 978-5-87730-283-9

© Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2010.

## 1. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

**Определение:** Модулем (или абсолютной величиной) действительного числа  $a$  называется расстояние от начала отсчета до точки с координатой  $a$  на числовой прямой или

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

При решении уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, применяются чаще всего следующие методы:

- 1) раскрытие модуля по определению;
- 2) возведение обеих частей уравнения или неравенства в квадрат;
- 3) метод разбиения на промежутки;
- 4) метод замены переменной.

### Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля Методы решения уравнений

#### 1. Раскрытие модуля по определению

Простейшими уравнениями с модулями являются уравнения вида,  $f(|x|) = g(x)$ , (1), где  $f(x)$  и  $g(x)$  - некоторые функции.

**Пример 1.** Решить уравнение:  $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ .

**Решение.** Исходное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = -3 \\ x < 0 \end{cases}$$

**Ответ:**  $\{-3; -1; 1; 3\}$

Рассмотрим уравнение вида  $|f(x)| = g(x)$  (2)

Существует два способа замены уравнения (2) совокупностью систем:

I способ: Уравнение (2) равносильно совокупности:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

II способ: Уравнение (2) равносильно совокупности:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Если в уравнении (2) функция  $f(x)$  имеет более простой вид, чем  $g(x)$ , целесообразно уравнение (2) заменять первой совокупностью систем, а если более простой вид имеет функция  $g(x)$ , то уравнение (2) целесообразно заменять второй совокупностью систем.

В частности, уравнение вида  $|f(x)| = b, b \in R$ :

При  $b < 0$  решений не имеет,

при  $b = 0$  равносильно уравнению  $f(x) = 0$ ;

при  $b > 0$  равносильно совокупности уравнений  $\begin{cases} f(x) = b \\ f(x) = -b \end{cases}$ .

Пример 2. Решить уравнение:  $4 - 5x = |5x - 4|$ .

$$\text{Решение: } \begin{cases} 4 - 5x = 5x - 4 \\ 5x - 4 \geq 0 \\ 4 - 5x = 4 - 5x \\ 5x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ x \geq \frac{4}{5} \\ x < \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{4}{5}\right].$$

Уравнение вида  $h(|f(x)|) = g(x)$ , где  $h, f, g$  - некоторые

функции, равносильно совокупности систем  $\begin{cases} h(f(x)) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ ;

$$\begin{cases} h(-f(x)) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение:  $\frac{4x-8}{|x-2|} = x$ .

$$\text{Решение: } \begin{cases} \frac{4x-8}{x-2} = x \\ x-2 > 0 \\ \frac{4x-8}{2-x} = x \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x^2+6x-8}{x-2} = 0 \\ x > 2 \\ \frac{x^2+2x-8}{2-x} = 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(x-4)(x-2)}{x-2} = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \\ x > 2 \\ \frac{(x+4)(x-2)}{2-x} = 0 \Rightarrow x_2 = -4 \\ x < 2 \end{cases}$$

Ответ:  $\{-4; 4\}$ .

**Замечание.** При решении уравнения, в котором под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль, следует сначала освободиться от внутренних модулей, а затем в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.

Пример 4. Решить уравнение:  $|x - |2x + 3|| = 3x - 1$ .

**Решение.** Пользуясь определением, раскроем сначала внутренний модуль получим равносильную исходному уравнению совокупность смешанных систем:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ |x-(2x+3)| = 3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ |-x-3| = 3x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3 < 0 \\ |x+(2x+3)| = 3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ |3x+3| = 3x-1 \end{cases}$$

Решим первую систему этой совокупности. Раскрывая модель по определению, получим следующую совокупность смешанных систем, равносильную первой системе совокупности:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ -x-3 \geq 0 \\ -x-3 = 3x-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ -x-3 < 0 \\ x+3 = 3x-1 \end{cases} .$$

Первая из этих систем решений не имеет, а из второй системы находим  $x = 2$ . Аналогично решается вторая система совокупности. При  $x < -\frac{3}{2}$  выражение  $3x-1 < 0$ . Следовательно, уравнение этой системы корней не имеет. *Ответ:*  $\{2\}$ .

## 2. Возведение обеих частей уравнения в квадрат

Рассмотрим уравнение вида  $|f(x)| = g(x)$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  - некоторые функции.

$$\text{Так как } (|f(x)|)^2 = (f(x))^2, \text{ то } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ (f(x))^2 = (g(x))^2 \end{cases} .$$

Уравнение вида  $|f(x)| = |g(x)|$  также удобно решать методом возведения обеих частей в квадрат или с помощью равносильного

$$\text{перехода: } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} .$$

*Пример 5.* Решить уравнение:  $|2x-3| = x-2$ .

$$\text{Решение. } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ (2x-3)^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Последняя система решений не имеет, а следовательно, и исходное уравнение корней не имеет.

*Ответ:* решений нет.

## 3. Разбиение на промежутки

Рассмотрим уравнение вида  $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$  (3), где  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  - некоторые функции.

Такие уравнения удобно решать методом разбиения на промежутки (или методом интервалов). Для этого находят все точки, в которых хотя бы одна из функций  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  меняет знак. Эти точки делят область допустимых значений уравнения (3) на промежутки, на каждом из которых все функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  сохраняют знак. Затем, используя определение модуля, переходят от уравнения (3) к совокупности систем, не содержащих знака модуля.

*Пример 6.* Решить уравнение:  $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$ .

*Решение.* На числовую прямую наносятся значения  $x$ , при которых  $x^2 - 9 = 0$  и  $x^2 - 4 = 0$ . Числовая прямая при этом разобьется на промежутки  $(-\infty; -3)$ ,  $[-3; -2)$ ,  $[-2; 2)$ ,  $[2; 3)$ ,  $[3; +\infty)$ .

Решим уравнения на каждом из этих промежутков, то есть решим равносильную исходному уравнению совокупность смешанных систем:

$$\begin{cases} x < -3 \\ x^2 - 9 + x^2 - 4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < -2 \\ 9 - x^2 + x^2 - 4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 2 \\ 9 - x^2 + 4 - x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ 9 - x^2 + x^2 - 4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 9 + x^2 - 4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset,$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < -2 \\ 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; -2),$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 2 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2,$$

$$\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 3),$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3,$$

Объединяя все эти решения, получим  $x \in [-3; -2] \cup [2; 3]$ .

Ответ:  $x \in [-3; -2] \cup [2; 3]$ .

#### 4. Замена неизвестного

Пример 7. Решить уравнение:  $(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0$ .

Решение. Положим  $t = |x-1|, t \geq 0$ . Тогда данное уравнение запишется в виде:  $t^2 + t - 2 = 0$  (поскольку  $(x-1)^2 = (|x-1|)^2 = |x-1|^2$ ).

$t_1 = -2$ , (не удовлетворяет условию  $t \geq 0$ ),  $t_2 = 1$ . Далее имеем  $|x-1| = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$ .

Ответ:  $\{0; 2\}$ .

#### Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

При решении неравенства, содержащего переменную под знаком модуля, следует разбить область допустимых значений неравенства на множества, на каждом из которых выражение, стоящее под знаком модуля, сохраняет знак. На каждом таком множестве нужно решать неравенство и полученные решения объединять в множество решений исходного неравенства.

При решении таких неравенств используются те же методы, на которых основано решение уравнений, содержащих знак модуля. Неравенства вида  $|f(x)| > g(x)$  равносильно совокупности двух

неравенств 
$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

Неравенство вида  $|f(x)| < g(x)$  равносильно системе 
$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$$

Для тех  $x$ , при которых  $g(x) \leq 0$ , эта система, а значит и данное неравенство решений не имеют.

Пример 8. Решить неравенство:  $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$ .

Решение.

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 > x + 3 \\ x^2 + 4x + 3 < -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x > 0 \\ x^2 + 5x + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3) > 0 \\ (x+2)(x+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x > 0 \\ -3 < x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty).$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$

Пример 9. Решить неравенство:  $x^2 - 4x - 2|x - 2| + 1 \leq 0$ .

Решение.

I способ.

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 2(x-2) + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2 - 4x + 2(x-2) + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ x \in [-1; 5]$$

II способ. Неравенство можно решить также методом замены неизвестного. Пусть  $|x-2|=t$ , тогда  $t^2 = x^2 - 4x + 4$ , Исходное неравенство перепишем в виде:  $t^2 - 2t - 3 \leq 0$ , решим соответствующее уравнение  $t^2 - 2t - 3 = 0$ ,  $t_1 = -1$  (не удовлетворяет условию  $t \geq 0$ ),  $t_2 = 3$ . Таким образом,  $0 \leq t \leq 3$ , отсюда  $|x-2| \leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq 3 \\ x-2 \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5.$$

Ответ:  $x \in [-1; 5]$

Неравенства вида  $|f(x)| < g(x)$  можно решать двумя способами. Оно равносильно совокупности двух систем:  $\begin{cases} |f(x)| < g(x) \\ x \geq 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} |f(-x)| < g(x) \\ x < 0 \end{cases}$ , а также равносильно системе

неравенств:  $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$ . Выбор способа решения зависит от

конкретного неравенства и от сложности функций  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Пример 10. Решить неравенство:  $|x^2 - 3x + 2| - 1 < x - 2$ .

Решение.  $\begin{cases} |x^2 - 3x + 2| - 1 < x - 2 \\ |x^2 - 3x + 2| - 1 > 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 3x + 2| < x - 1 \\ |x^2 - 3x + 2| > 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 > 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 3 - x \\ x^2 - 3x + 2 < x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 4x + 5 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) < 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x > 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} < x < 3. \\ (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}) > 0 \\ x < 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ:  $(1 + \sqrt{2}; 3)$

Неравенства вида  $|f(x)| > g(x)$  (4) решается при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком знакопостоянства как функции  $f(x)$ , так и функции  $g(x)$ . Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака модуля. Объединяя найденные решения на всех частях ОДЗ исходного неравенства, получаем множество всех его решений.

Также решаются и неравенства более общего вида:  $\alpha_1 |f_1(x)| + \alpha_2 |f_2(x)| + \dots + \alpha_n |f_n(x)| \geq g(x)$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - некоторые действительные числа.

Некоторые неравенства вида (4) целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству:  $f^2(x) \geq g^2(x)$ .

Пример 11. Решить неравенство:  $\left| \frac{1}{x+2} \right| < \left| \frac{2}{x-1} \right|$ .

Решение. Числовая ось разбивается на 3 промежутка  $(-\infty; -2), [-2; 1), [1; +\infty)$ .

$$\begin{cases} x < -2 \\ \frac{1}{x+2} < -\frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x+2} < -\frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{1}{x+2} < \frac{2}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ \frac{x+5}{(x+2)(x-1)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ \frac{3(x+1)}{(x+2)(x-1)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{x+5}{(x+2)(x-1)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Ответ:  $(-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

### Упражнения

1) Решить уравнения:

а)  $\frac{x-1}{x+3} = 1$ , б)  $|-x^2 - 16| = 8x$ , в)  $|2x+5| = |x| + 2$ ,

г)  $\frac{2x^2 - 6}{|x-1} = |x| + 3$  д)  $\frac{|x-3|}{|x-2|-1} = 1$ , е)  $||3-x| - x + 1| + x = 6$ .

2) Решить системы уравнений:

а)  $\begin{cases} 3|x+1| + 2|y-2| = 20 \\ x+2y = 4 \end{cases}$  б)  $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 + |x-1| \end{cases}$

3) Решить неравенства:

а)  $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ ; б)  $|x+3| + |x-4| \leq 11$ ;

в)  $\frac{1}{|x|} (x^4 - 6x^2 - 16) \leq 0$ ; г)  $|x| + |2x+1| - x > 1$ ;

д)  $|4x^2 + 35x + 38| > |12x^2 + 33x + 32|$ ;

е)  $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 2$ ; ж)  $||x|-1| < 1-x$ .

4) Решить системы неравенств:

а)  $\begin{cases} |2x-4| - |3x+9| - |x-1| > -6 \\ |x+1| - |x-1| < 1 \end{cases}$ ; б)  $\begin{cases} |2x+7| - |3x+5| > 0 \\ \frac{|x+2|}{|x-1|} \geq 1 \end{cases}$ ;

в)  $\begin{cases} x^2 + 2|x+3| - 10 < 0 \\ \frac{x^2 - 4|x| + 3}{x^2 + |x-5|} \geq 1 \end{cases}$ ; г)  $\begin{cases} \frac{2}{|x-2|} > \left| -\frac{3}{2x-1} \right| \\ |x^3 - x| \leq x \end{cases}$ .

### Домашнее задание

Решить уравнения, неравенства и их системы

Вариант I.

а)  $x^2 + 3x + |x+3| = 0$ ; б)  $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$ ; в)  $\begin{cases} 3u - v = 1 \\ |u - 2v| = 2 \end{cases}$ ;

г)  $|x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|$ ; д)  $|x^2 - 1| < x^2 - |x| + 1$

Вариант II.

а)  $2x^2 - 5|x| + 3 = 0$ ; б)  $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6| = 1$ ;

в)  $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ |y| - x - 1 = 0 \end{cases}$ ; г)  $|x^2 - 3x + 2| - 1 > x - 2$ ; д)  $|x| + |2x+1| - x > 1$ .

Вариант III.

а)  $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$ ; б)  $|x-1| + |x-3| = 2$

в)  $\begin{cases} |x-1| + y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ ; г)  $|x^2 - |x|| < \frac{1}{4}$ ; д)  $|x-1| + |2-x| > 3$ .

Вариант IV.

а)  $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ ; б)  $|7x - 12| - |7x - 11| = 1$ ; в)  $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x - 1| < 3 \end{cases}$ ;

г)  $\|2x + 1| - 5| > 2$ ; д)  $|x| \cdot (x^2 - 2x - 3) \geq 0$ .

Вариант V.

а)  $|3x - 2| + x = 11$ ; б)  $|x| - |x - 2| = 2$ ; в)  $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0 \\ |y| + x - 3 = 0 \end{cases}$ ;

г)  $\|x - 2| - x + 3| < 5$ ; д)  $x^2 + |6x - 24| \leq 16$ .

Вариант VI.

а)  $4 - 5x = |5x - 4|$ ; б)  $|x - 2| = 3|3 - x|$ ; в)  $|2x - |x + 3| + 1| > 2$ ;

г)  $\begin{cases} |x| \leq -x \\ |x + 2| > 1 \end{cases}$ ; д)  $|x^2 + 2x - 4| > 4$ .

Вариант VII.

а)  $|5x^2 - 3| = 2$ ; б)  $|x^2 - 9| + |x - 2| = 5$ ; в)  $\|x - 3| + 1| \geq 2$ ;

г)  $|x^2 - 8x + 15| < x - 3$ ; д)  $\begin{cases} |2x + 5| \geq |7 - 4x| \\ |x| < 2|x - 4| + x - 2 \end{cases}$

Вариант VIII.

а)  $|9 - x^2| = 5$ ; б)  $|x - 1| + |x - 3| = 3$ ; в)  $|2x - |3 - x| - 2| \leq 4$ ;

г)  $|x^2 - 3x + 2| \leq 2x - x^2$ ; д)  $\begin{cases} |x| \geq x \\ 2x - 1 > 3 \end{cases}$

Вариант IX.

а)  $(x + 2)^2 = 2|x + 2| + 3$ ; б)  $\frac{4}{|x + 1| - 2} = |x + 1|$ ; в)  $\|x - 1| + x| < 3$ ;

г)  $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x - 1| < 3 \end{cases}$ ; д)  $|x^2 - 4x| < 5$ .

Вариант X.

а)  $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$ ; б)  $|5x - 13| - |6 - 5x| = 7$ ;

в)  $|x - 1| - |x - 2| + |x + 1| > |x + 2| + |x - 3|$ ; г)  $\|3 - 2x| - 1| = 2|x|$ ;

д)  $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| < 2 \end{cases}$

Вариант XI.

а)  $x^2 - 4|x + 1| + 5x + 3 = 0$ ; б)  $|3x - 5| = |5 - 2x|$ ;

в)  $|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| > 4$ ; г)  $|x^2 - 2x - 3| + 2 \cdot |x - 2| < 5$ ;

д)  $\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5 \\ |x + 1| < 3 \end{cases}$

Вариант XII.

а)  $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$ ; б)  $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 2$ ;

в)  $|x - 1| - |x| + |2x + 3| > 2x + 4$ ; г)  $\left|1 - \frac{|x|}{1 + |x|}\right| \geq \frac{1}{2}$ ; д)  $\begin{cases} |2x - 5| - 4x + 7 \geq 0 \\ |x^2 - 3| + 1 + 2x \geq 0 \end{cases}$

Вариант XIII.

а)  $x^2 - |x| = 6$ ; б)  $|x + 1| + |x - 2| = 3$ ;

в)  $|x + 1| < |x - 3|$ ; г)  $\frac{4}{|x| - 1} \geq |x - 1|$ ; д)  $\begin{cases} |2x + 3y| = 5 \\ |2x - 3y| = 1 \end{cases}$

Вариант XIV.

а)  $x^2 + 2x = 2|x + 1| + 7$ ; б)  $\|x| - 2| - 1| - 2| = 2$ ;

в)  $|2x + 5| \geq 7$ ; г)  $|x + 1| < 3x - |x - 2|$ ; д)  $\begin{cases} |u - v| = 2 \\ 2u + v = 7 \end{cases}$ ;

Вариант XV.

а)  $|x^3 + x + 1| = |x^2 + 3x - 1|$ ; б)  $\|x + 4| - 2x| = 3x - 1$ ;

$$\text{в) } \frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 + |x| - 6} \geq 0; \quad \text{г) } |x^2 - 3x + 2| \leq 2x - x^2; \quad \text{д) } \begin{cases} |x + y| = 2 \\ |x| + |y| = 3 \end{cases}$$

Вариант XVI.

$$\text{а) } \frac{1 - 2x}{3 - |x - 1|} = 1; \quad \text{б) } |x + 2| + |x - 3| = 5; \quad \text{в) } \left| \frac{2x + 3}{3x - 2} \right| > 1;$$

$$\text{г) } |x + 1| < 3x - |x - 2|; \quad \text{д) } \begin{cases} |x - y| = 1 \\ |x - 1| + |y - 2| = 3 \end{cases}$$

Вариант XVII.

$$\text{а) } |2x - 5| = x - 1; \quad \text{б) } |x - |2x + 3|| = 3x - 1; \quad \text{в) } \left| \frac{x + 2}{2x - 3} \right| < 3;$$

$$\text{г) } |x| + |x - 1| + |x - 2| < 4; \quad \text{д) } \begin{cases} |x - y| = 2 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases}$$

Вариант XVIII.

$$\text{а) } |x - 1| + |x - 2| = 1; \quad \text{б) } ||3 - 2x| - 1| = 2|x|;$$

$$\text{в) } |x - 6| > |x^2 - 5x + 9|; \quad \text{г) } \left| \frac{1 - 3|x|}{1 + |x|} \right| > 1; \quad \text{д) } \begin{cases} |x - 2| \leq 3 \\ |y - 1| \leq 4 \end{cases}$$

Вариант XIX.

$$\text{а) } 3x = 5 + |3x - 5|; \quad \text{б) } |x| - 2|x + 1| + 3|2x - 4| = 1;$$

$$\text{в) } \frac{4}{x + 1} + \frac{2}{|x| - 1} \geq \frac{2}{x - 2}; \quad \text{г) } ||x - 3| + 1| \geq 2; \quad \text{д) } \begin{cases} |x + 3| + |y + 1| = 4 \\ |x - 1| + |y - 3| = 5 \end{cases}$$

Вариант XX.

$$\text{а) } |2|x - 1| + 3x - 4| = x - 2; \quad \text{б) } |x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4;$$

$$\text{в) } \frac{-2}{|x| + 1} \geq |x| - 2; \quad \text{г) } |2x + 1| - |5x - 2| \geq 1; \quad \text{д) } \begin{cases} |x| + 5y + 9 = 0 \\ 2x - |y| - 7 = 0 \end{cases}$$

Вариант XXI.

$$\text{а) } \frac{|x^2 - x| + 1}{|x + 1| - x^2} = 1; \quad \text{б) } |x - 2| + |x + 4| = 3; \quad \text{в) } |x| + |2x + 1| - x > 1;$$

$$\text{г) } \frac{|x^2 - 2x + 1|}{x^2 - 4x + 4} + \left| \frac{x - 1}{x - 2} \right| - 12 < 0; \quad \text{д) } \begin{cases} |2x - y| \leq 2 \\ |2x + y| \leq 1 \end{cases}$$

Вариант XXII.

$$\text{а) } |x - x^2 - 1| = |2x - 3 - x^2|; \quad \text{б) } \frac{4x - 8}{|x - 2|} = x;$$

$$\text{в) } |x^2 + x + 10| \leq 3x^2 + 7x + 2; \quad \text{г) } |3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2;$$

$$\text{д) } \begin{cases} |y - 10| - |x + 6| = 10 \\ \frac{y - 30}{x - 4} = 2 \end{cases}$$

Вариант XXIII.

$$\text{а) } |2x - 1| + 6x = |2x - 4| + 15; \quad \text{б) } |x - |1 - x|| - x = -1;$$

$$\text{в) } |2x - 1| < |4x + 1|; \quad \text{г) } ||2x + 1| - 5| > 2;$$

$$\text{д) } \begin{cases} |4x + 3y| \leq 2 \\ x - y \geq -1 \\ x \leq 1 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

Вариант XXIV.

а)  $|x^2 + x - 1| + 1 = 2x$ ; б)  $|x - 1| - |x - 2| = 1$ ;

в)  $|10 - y^2| + |2y^2 - 5| \leq 1$ ; г)  $||x - 3| + 1| \geq 2$ ;

д) 
$$\begin{cases} |2|x + 2| - 5|y + 10| = 20 \\ \frac{y + 2}{x - 28} = \frac{4}{15} \end{cases}$$

Вариант XXV.

а)  $|x| + x^3 = 0$ ; б)  $|x + 2| - |x - 3| + |x - 1| = 4$ ; в)  $\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| > 1$ ;

г)  $|2y^2 - 1| + |3 - y^2| \leq 1$ ; д) 
$$\begin{cases} x + y - 7 \leq 0 \\ |x - y| \leq 2 \\ 4x > 5 \end{cases}$$

## II. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

*Определение:* Иррациональным называется уравнение (неравенство), в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень.

### Иррациональные уравнения

Основными методами решения иррациональных уравнений являются метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень и метод введения новой переменной.

#### I. Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень

При решении иррациональных уравнений используются следующие свойства:

1) все корни четной степени, входящие в уравнение, являются арифметическими;

2) все корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любом действительном значении подкоренного выражения;

3) функции  $y = \sqrt[n]{x}$  и  $y = \sqrt[n+1]{x}$  являются возрастающими на своей области существования.

Рассмотрим иррациональные уравнения двух видов:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases};$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

*Пример 1.* Решить уравнение:  $\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$

*Решение:* Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2 \\ 2x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

*Ответ:*  $\left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$ .

Пример 2. Решить уравнение:  $\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1$ .

Решение:  $\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 = (x - 1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ:  $x = 1$ .

Рассмотрим причины появления посторонних корней исходного уравнения при возведении обеих частей иррационального уравнения в степень, позволяющую избавиться от радикалов:

- 1) в связи с возможным расширением ОДЗ исходного уравнения;
- 2) в связи с возведением в четную степень его левой и правой частей, которые равны по абсолютной величине, но одна из них положительна, а другая отрицательна.

Поэтому решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием можно проводить таким образом:

- 1) найти ОДЗ исходного уравнения;
- 2) перейти от уравнения к его следствию;
- 3) найти корни полученного уравнения;
- 4) проверить, являются ли найденные корни корнями исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение:  $x = (\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{10+x} - 4)$ .

Решение: ОДЗ:  $x \geq -1$

Умножим обе части уравнения на  $(\sqrt{1+x} - 1)$ :  
 $x(\sqrt{1+x} - 1) = x(\sqrt{10+x} - 4)$ . Получаем  $x(\sqrt{1+x} - \sqrt{10+x} + 3) = 0$  - уравнение - следствие.

Его корни  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -1$  (при этом расширения ОДЗ не произошло).

Проверка:  $x_1 = 0$  - посторонний корень.

Ответ:  $x = -1$ .

## II. Введение новой переменной (подстановка)

Пример 4. Решить уравнение:  $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3$ .

Решение: ОДЗ:  $\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ .

Выполним замену  $t = \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow x = t^2 + 2$ . Далее подставим  $t$  в исходное уравнение:

$$\sqrt{3(t^2+2)-1} - t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3t^2+5} = 3+t.$$

После возведения в квадрат и упрощения получим  $t^2 - 3t - 2 = 0$ .

$$t_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \notin \text{ОДЗ}.$$

Теперь вычисляем корень исходного уравнения:

$$x = t^2 + 2 = \frac{15+3\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ:  $x = \frac{15+3\sqrt{17}}{2}$ .

Пример 5. Решить уравнение:  $\sqrt{x+\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$ .

Решение: Пусть  $t = \sqrt{x-1}$ ,  $t \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + 1$ , и уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2+t+1} + \sqrt{t^2-2t+1} = 2.$$

Заметив, что под вторым знаком радикала стоит  $(t-1)^2$ , получаем  $\sqrt{t^2+t+1} = 2 - |t-1|$ .

При  $0 \leq t < 1$  имеем  $\sqrt{t^2+t+1} = 1+t$ , откуда  $t^2+t+1 = 1+2t+t^2 \Rightarrow t=0$ , а  $x_1 = 1$ .

При  $t \geq 1$  переходим к уравнению  $\sqrt{t^2+t+1} = 3-t$ , единственный корень которого  $t = \frac{8}{7}$  удовлетворяет условию  $t \geq 1$ .

Итак,  $x_2 = 1 + \frac{64}{49} = 2\frac{15}{49}$ .

Так как в начале решения иррационального уравнения не было найдено ОДЗ, то необходимо сделать проверку.

Проверка:

$$\text{При } x=1 \quad \sqrt{1+\sqrt{1-1}} + \sqrt{1-2\sqrt{1-1}} = 2, \quad 2=2;$$

$$\text{при } x=2 \quad \frac{15}{49} \sqrt{\frac{113}{49} + \sqrt{\frac{113}{49} - 1}} + \sqrt{\frac{113}{49} - 2\sqrt{\frac{113}{49} - 1}} = 2.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \frac{15}{49}.$$

Пример 6. Решить уравнение:  $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x-1} = 1$ .

$$\text{Решение: ОДЗ: } x \geq 0. \text{ Положим } \begin{cases} \sqrt{x} = u, u \geq 0, \\ \sqrt[3]{x-1} = v \end{cases}, \text{ тогда наше}$$

уравнение примет вид  $u+v=1$ .

Для получения второго уравнения относительно новых переменных  $u, v$  возведем обе части первого уравнения системы в

квадрат, а второго – в куб. Получим:  $\begin{cases} u^2 = x, \\ v^3 = x-1 \end{cases}$ , откуда  $u^2 = v^3 + 1$ .

Таким образом для нахождения  $u, v$  имеем следующую систему

уравнений:  $\begin{cases} u+v=1, \\ u^2 = v^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v, \\ 1-2v+v^2 = v^3 + 1 \end{cases}$ . Решая второе уравнение

системы, получаем  $v=0$ , откуда  $x=1$ .

Ответ:  $x=1$ .

Пример 7. Решить систему:  $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x-1 = (\sqrt{x}+1)y \end{cases}$ .

Решение: ОДЗ:  $x \geq 0$ . Из первого уравнения выразим  $\sqrt{x} = 9 - 3y$  (\*) и подставим во второе уравнение:

$$(9 - 3y)^2 - 1 = (9 - 3y + 1)y.$$

$$12y^2 - 64y + 80 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 16y + 20 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2 \text{ и } y_2 = \frac{10}{3} \text{ (не}$$

подходит по смыслу уравнения (\*)). Далее имеем  $x = (9 - 3 \cdot 2)^2 = 9$

Ответ: (9; 2).

Пример 8. Решить систему:  $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6 \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2 \end{cases}$

Решение: Сделаем замену  $\sqrt{x+y} = u, u \geq 0, \sqrt{7x+y} = v, v \geq 0$   
 $x = \frac{v^2 - u^2}{6}, y = \frac{7u^2 - v^2}{6}$ , запишем систему в виде:

$$\begin{cases} v+u=6 \\ u - \frac{7u^2 - v^2}{6} + \frac{v^2 - u^2}{6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u - \frac{4}{3}u^2 + \frac{1}{3}(6-u)^2 = 2 \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение:

$-u^2 - 3u + 10 = 0$ . Имеем  $u_1 = 2$  и  $u_2 = -5$  (не подходит, так как  $u \geq 0$ )

$v_1 = 4$ . Вернемся к исходной переменной:  $x = \frac{4^2 - 2^2}{6} = 2;$

$$y = \frac{7 \cdot 2^2 - 4^2}{6} = 2$$

Ответ: (2; 2)

### Упражнения

Решить уравнения и системы:

1)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x;$

2)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11;$

3)  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1;$

4)  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0;$

5)  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x};$

6)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+2} = 0;$

7)  $\sqrt{2x+9} + \sqrt[3]{x+8} = 5;$

8)  $\begin{cases} \sqrt{2x+3y} + \sqrt{2x-3y} = 10 \\ \sqrt{4x^2 - 9y^2} = 16 \end{cases}$

9)  $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3 \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4 \end{cases}$

### Иррациональные неравенства

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенства функции определены, то есть:

1) найти ОДЗ этого неравенства;

2) обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

Рассмотрим неравенства вида:

$${}^{2n}\sqrt{f(x)} < {}^{2n}\sqrt{g(x)}, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < {}^{2n+1}\sqrt{g(x)}, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

$${}^{2n}\sqrt{f(x)} < g(x), n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < g(x), n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x).$$

$${}^{2n}\sqrt{f(x)} > g(x), n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^{2n}(x) \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > g(x), n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x).$$

Пример 8. Решить неравенство:  $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{1-x^2-x}$ .

Решение:  $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{1-x^2-x}$ .

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 1-x^2-x \\ 1-x^2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ .

Пример 9. Решить неравенство  $\sqrt{x+5} \leq 1-x$ .

Решение:

$$\sqrt{x+5} \leq 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x+5 \leq (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ x^2-3x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ (x-4)(x+1) \geq 0 \end{cases}$$

Ответ:  $x \in [-5; -1]$ .

Пример 10. Решить неравенство:  $\sqrt{x+2} \geq x + \frac{1}{2}$ .

Решение:  $\sqrt{x+2} \geq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ x + 2 \geq (x + \frac{1}{2})^2 \\ x + \frac{1}{2} < 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ (x - \frac{\sqrt{7}}{2})(x + \frac{\sqrt{7}}{2}) \leq 0 \\ x < -\frac{1}{2} \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right] \\ x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-2; \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$$

Ответ:  $x \in \left[-2; \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$ .

Решение более сложных иррациональных неравенств основано на сведении их с помощью преобразований к простейшим, рассмотренным выше.

Пример 11. Решить неравенство:  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2$ .

Решение: Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными, и можно было возвести в квадрат (не рассматривая при этом два случая):

$$\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-2} + 2 \Leftrightarrow 2x+3 > x-2 + 4\sqrt{x-2} + 4 \Leftrightarrow x+1 > 4\sqrt{x-2}$$

$$x+1 > 4\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x+1 > 0 \\ 16(x-2) < x^2+2x+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x > -1, \\ x^2-14x+33 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ (x-3)(x-11) > 0, \end{cases}$$

Ответ:  $x \in [2; 3) \cup (11; +\infty)$

### Упражнения

Решить неравенства:

- 1)  $3\sqrt{6+x-x^2} > 4x-2$ ; 2)  $\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geq 1$ ; 3)  $\sqrt{\frac{2x-1}{3x-2}} \leq 3$ ;  
 4)  $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9$ ; 5)  $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$ .

### Домашнее задание

Решить иррациональные уравнения, неравенства и их системы:

Вариант I.

$$\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}; \quad \sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} = \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3};$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \\ \sqrt{5x+y}\sqrt{5x-y} = 4; \end{cases} \quad (2+x)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geq 0; \quad \sqrt{1+x} > 1 + \sqrt{1-x}.$$

Вариант II.

$$\sqrt{8x^2-7} = 3x-4; \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}; \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1 \end{cases};$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x} \geq 1; \quad (x+3)\sqrt{\frac{6-x}{8-x}} \geq 0.$$

Вариант III.

$$\sqrt{12-x} = x; \quad \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4; \quad \begin{cases} x+y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2+7x+50} \geq x-3; \quad \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} < x-8.$$

Вариант IV.

$$\sqrt{6-4x-x^2} = x+4; \quad \sqrt{8-x} + \sqrt{5+x} - \sqrt{9+5x} - \sqrt{4-5x} = 0;$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x+11-y} - \sqrt{3x+y-9} = 3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11} + \sqrt[4]{3x+y-9} = 3; \end{cases}$$

$$(2+x)\sqrt{4-x}\sqrt{5-x} \geq 0; \quad \frac{4x}{1+x^2} < 1 + \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

Вариант V.

$$\sqrt{2x^2-21x+4} = 2-11x; \quad \sqrt{x^2+x+4} - \sqrt{2x^2+2x+9} = \sqrt{x^2+x+1};$$

$$\begin{cases} y^2 + \sqrt{3y^2-2x+3} = \frac{2}{3}x+5; \\ 3x-2y = 5 \end{cases};$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} \geq 2; \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2.$$

Вариант VI.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7; \quad \sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \frac{36}{\sqrt{x-9}}; \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9; \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1; \quad (x^2+2x-8)\sqrt{x^2+x-2} \leq 0.$$

Вариант VII.

$$\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2; \quad \frac{2x-8}{\sqrt{6-x}} + \sqrt{6-x} = 3\sqrt{x-4}; \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9; \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-2x} > 4-x; \quad \frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1} > 0$$

Вариант VIII.

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1; \frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}; \begin{cases} 2\sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \\ 4\sqrt{\frac{x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{cases};$$

$$\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x; \sqrt{-25x^2+15x-2} \cdot (8x^2-6x+1) \geq 0$$

Вариант IX.

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x-23}; \sqrt{11x-2} + 3\sqrt{x} = 6;$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3; \end{cases} (x-1)\sqrt{16-x^2} \leq 0; \frac{1}{1-\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Вариант X.

$$\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}; \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1;$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\frac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5; \end{cases} (x+10)\sqrt{x-4} < 0; \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$$

Вариант XI.

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x+19} = 0; \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1; \end{cases} \sqrt{(x-6)(x-12)} < x-1; \frac{\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-6}} > 0.$$

Вариант XII.

$$(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0; \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} - \sqrt{x-2} = 0;$$

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20; \end{cases} \sqrt{x-6}\sqrt{x-12} < x-1; \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

Вариант XIII.

$$(x^2-1)\sqrt{2x-1} = 0; \sqrt{x+1} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0;$$

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y} = 20 \\ x^2+y^2 = 136 \end{cases}; x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{35}{12}; \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+5} \geq \sqrt{5-2x}.$$

Вариант XIV.

$$(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0; \sqrt{x} - \sqrt{3(x-1)} = \sqrt{x-3}; \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}; \\ x+y = 5 \end{cases};$$

$$\sqrt{x-5} / (\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1) \geq 0; \sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x} \geq 0$$

Вариант XV.

$$(16-x^2)\sqrt{3-x} = 0; \sqrt{x+3} - 1 = \sqrt{x-\sqrt{x-2}}; \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \end{cases};$$

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} - \sqrt{4x+5} < 0; \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$$

Вариант XVI.

$$\sqrt{4+2x-x^2} = x-2; \sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1; \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ 3x+2y = 23 \end{cases};$$

$$2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \geq 2\sqrt{x-3}; \frac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+1} \geq 0.$$

Вариант XVII.

$$4\sqrt{x+6} - x = 1; \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x-\sqrt{x+8}}; \begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6 \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2 \end{cases};$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{2x-5} > \sqrt{x-1}; \frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} < \frac{1}{2}.$$

Вариант XVIII.

$$\sqrt{37-x^2}+5=x; \sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x};$$

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2; \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0 \end{cases};$$

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{8x-5}+\sqrt{1-x}>0; \sqrt{x-3}\leq\frac{2}{\sqrt{x-2}}.$$

Вариант XIX.

$$\sqrt{6-4x-x^2}=x+4; \sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+7}-\sqrt{x+4};$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}; \sqrt{17-4x}-\sqrt{13x+1}+\sqrt{x-5}\leq 0; \frac{2}{2-\sqrt{x+3}}\leq 1. \\ x^2+y^2=15 \end{cases}$$

Вариант XX.

$$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1; \sqrt{x+8}+2\sqrt{x+7}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+7}=4;$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}; (1+x^2)\sqrt{x^2+1}>x^2-1; \frac{3}{x}+1<\sqrt{\frac{9}{x^2}}-3. \\ x+y+xy=9 \end{cases}$$

Вариант XXI.

$$4+\sqrt{26-x^2}=x; \sqrt[3]{1,5}\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0; \begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3; \\ xy=8 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\leq 1; \sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}<x+1.$$

Вариант XXII.

$$3x-\sqrt{18x+1}+1=0; \sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}; \begin{cases} \sqrt{\frac{x^3}{y}}-\sqrt{\frac{y^3}{x}}=\frac{65}{6}; \\ x-y=5 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2; \sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}\geq\sqrt{2}.$$

Вариант XXIII.

$$\frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}=1; \sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt{x}=0; \begin{cases} x^2+x\sqrt{xy^2}=80; \\ y^2+y\sqrt{x^2y}=5 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{2-3x-2x^2}}{3x+4}\leq\frac{\sqrt{2-3x-2x^2}}{x-1}; \sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$$

Вариант XXIV.

$$\frac{1+\sqrt{2x+1}}{x}=1; \sqrt{x+24}+\sqrt{12-x}=6; \begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=14; \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}}>0; \sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}.$$

Вариант XXV.

$$\frac{2+\sqrt{19-2x}}{x}=1; \sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4;$$

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6; \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}; \sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x} \\ x^2y+y^2x=20 \end{cases}$$

### III. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

#### Показательные уравнения

*Определение.* Показательными называются уравнения, в которых неизвестное входит только в показатели степеней при постоянных основаниях. Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^x = b. \quad (1)$$

Его решением при  $a > 0$  и  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ , является

$$x = \log_a b.$$

Пример 1. Решить уравнение  $4^x = 5$ .

*Решение:*  $x = \log_4 5$ .

*Ответ:*  $x = \log_4 5$ .

Пример 2. Решить уравнение  $2^x = -3$ .

*Решение:*  $x \in \emptyset$ , т.к.  $b = -3 < 0$ .

*Ответ:* решений нет.

Если вместо  $x$  в показателе степени стоит некоторая функция  $f(x)$ , т.е. уравнение имеет вид

$$a^{f(x)} = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad (2)$$

то, логарифмируя обе части этого уравнения, приходим к эквивалентному уравнению

$$f(x) = \log_a b.$$

Пример 3. Решить уравнение  $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-1} = 7$ .

*Решение:*  $5x - 1 = \log_{\frac{2}{3}} 7$ , откуда  $5x = 1 + \log_{\frac{2}{3}} 7$ ,

$$x = \frac{1}{5} \log_{\frac{2}{3}} \frac{14}{3}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{1}{5} \log_{\frac{2}{3}} \frac{14}{3}$ .

Вышеуказанный способ решения уравнений называют методом логарифмирования.

Некоторые показательные уравнения приводятся к виду (1) или (2) с помощью равенств:

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y}, & \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, & (a^x)^y &= a^{xy}, \\ (ab)^x &= a^x b^x, & \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}, & a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \\ a^0 &= 1, & a^1 &= a, \end{aligned}$$

где  $x$  и  $y$  – любые действительные числа.

Показательное уравнение, как правило, можно привести к виду

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad \text{где } a > 0, \quad a \neq 1.$$

Это уравнение равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ .

Имеются два основных метода решения показательных уравнений:

1) метод уравнивания показателей, т.е. преобразование заданного уравнения к виду  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , (или приведение обеих частей уравнения к одному и тому же основанию), а затем к виду  $f(x) = g(x)$ ;

2) метод введения новой переменной.

Пример 4. Решить уравнение  $2^{3x^2+3} = 2^{10x}$ .

*Решение:* Данное уравнение равносильно уравнению  $3x^2 + 3 = 10x$ , откуда находим  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ . решив это квадратное уравнение, получим  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 3$ .

*Ответ:*  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 3$ .

### Методы решения показательных уравнений

#### 1. Приведение обеих частей уравнения к одному и тому же основанию

Способ основан на следующем свойстве степеней: если две степени равны и равны их основания, то равны и их показатели (см. 1).

Пример 5. Решить уравнение  $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$ .

Решение: ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 7, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Приведем обе части уравнения к одному и тому же основанию 2.

$$\begin{aligned} (2^5)^{\frac{x+5}{x-7}} &= 2^{-2} \cdot (2^7)^{\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5x+25}{x-7}} = 2^{-2+\frac{7x+119}{x-3}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5x+25}{x-7} &= \frac{-2x+6+7x+119}{x-3}, \end{aligned}$$

откуда  $(5x+25)(x-3) = (5x+125)(x-7)$ ,  $80x = 800$ ,  $x = 10$  удовлетворяет ОДЗ.

Ответ:  $x = 10$ .

В частности уравнение вида  $a^{f(x)} = 1$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  равносильно уравнению  $f(x) = 0$ .

Пример 6. Решить уравнение  $6^{2x+1} = 1$ .

Решение: т.к.  $a^0 = 1$ , то  $1 = 6^0$ , т.е.  $6^{2x+1} = 6^0$ , откуда

$$2x+1=0, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Ответ:  $x = -\frac{1}{2}$ .

#### 2. Метод введения новой переменной

Решения показательных уравнений, сводящихся заменой переменных к алгебраическому уравнению.

Если показательное уравнение имеет вид

$$g(a^{f(x)}) = 0, \quad (3)$$

то заменой  $t = a^{f(x)}$  оно сводится к уравнениям вида

$$a^{f(x)} = t_i,$$

где  $t_i$  — корни уравнения  $g(t) = 0$ .

Пример 7. Решить уравнение  $36^x - 204 \cdot 6^{x-1} - 72 = 0$ .

Решение: Пусть  $6^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда имеем квадратное уравнение

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{204t}{6} - 72 &= 0 \text{ или} \\ t^2 - 34t - 72 &= 0, \end{aligned}$$

корнями которого будут  $t_1 = -2$  и  $t_2 = 36$ . Таким образом, получаем два уравнения  $6^x = -2$ ,  $6^x = 36$ .

Первое уравнение решений не имеет, т.к.  $6^x > 0$  при всех допустимых значениях  $x$ . Из второго уравнения получаем  $x = 2$ .

Ответ:  $x = 2$ .

Пример 8. Решить уравнение  $4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ .

Решение: Обозначая  $2^{\sqrt{x^2-2}+x} = t$  ( $t > 0$ ) и производя замену переменных, получаем квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0,$$

корнями которого являются  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -\frac{3}{2}$ . Таким образом,

решение данного уравнения свелось к решению уравнений

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4, \quad 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -\frac{3}{2}.$$

Второе уравнение решений не имеет, т.к.  $2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$  при всех допустимых значениях  $x$ . Из первого уравнения получаем

$$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2.$$

Уединя радикал и возводя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2.$$

Приводя подобные члены, получаем единственный корень  $x = \frac{3}{2}$ . Проверкой убеждаемся, что этот корень удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ:  $x = \frac{3}{2}$ .

Кроме двух основных методов решения показательных уравнений, указанных выше, существуют еще несколько вспомогательных методов, с помощью которых исходные уравнения приводятся в уравнения, решаемые приведением обеих частей в одно и то же основание или введением новой переменной.

Рассмотрим их.

### 3. Метод вынесения общего множителя за скобки

Пример 9. Решить уравнение  $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$ .

Решение: Перепишем данное уравнение в следующем виде

$$3^{2x-3} - 3^{2x-2} + 3^{2x} = 675.$$

Вынесем за скобки общий множитель  $3^{2x-3}$ :

$$3^{2x-3}(1 - 3 + 3^3) = 675 \text{ или}$$

$$3^{2x-3} \cdot 25 = 675, \text{ откуда}$$

$$3^{2x-3} = 27.$$

Полученное показательное уравнение решаем, используя один из основных методов – метод приведения обеих частей к одному и тому же основанию.

$$3^{2x-3} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ:  $x = 3$ .

### 4. Метод группировки

Поясним сущность этого метода на примере.

Пример 10. Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

Решение: Преобразуем члены уравнения

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 81 = 6 \cdot 4^x \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9.$$

Теперь перегруппируем слагаемые

$$3 \cdot 4^x - 24 \cdot 4^x = -\frac{9}{2} \cdot 9^x - 27 \cdot 9^x, \text{ т.е.}$$

$$4^x(3 - 24) = 9^x\left(-\frac{9}{2} - 27\right), \text{ т.е. } -21 \cdot 4^x = -\frac{63}{2} \cdot 9^x.$$

Запишем это равенство в виде пропорции

$$\frac{4^x}{9^x} = \frac{63}{2 \cdot 21} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}.$$

Отсюда  $2x = -1$ ,  $x = -\frac{1}{2}$ .

Ответ:  $x = -\frac{1}{2}$ .

### 5. Метод сведения к однородному уравнению

Суть метода заключается в почленном делении трехчленного уравнения, члены которого представляют собой степени с одинаковыми показателями и различными основаниями, на одну из степеней.

Пример 11. Решить уравнение  $5^{1+\frac{2}{x}} - 7 \cdot 10^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$ .

Решение: ОДЗ:  $x \neq 0$ .

Данное уравнение – однородное, т.к.

$$5^1 \cdot \left(5^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 7 \cdot 5^{\frac{1}{x}} \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} - 7 \cdot 5^{\frac{1}{x}} \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на  $25^{\frac{1}{x}} \neq 0$ :

$$5 - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = 0, \text{ т.е. } 5 - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{x}} = 0.$$

Обозначим  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = t > 0$ , тогда получаем следующее

квадратное уравнение относительно  $t$ :  $2t^2 - 7t + 5 = 0$ . Решив его находим  $t_1 = \frac{5}{2}$ ,  $t_2 = 1$ .

Отсюда  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$ , т.е.  $x_1 = -1$  и  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ , т.е.  $\frac{1}{x} = 0$  —

этого быть не может.

Ответ:  $x = -1$ .

### 6. Метод логарифмирования

(См. решение уравнений вида (1), (2), примеры 1-3.)

Пример 12. Решить уравнение  $3^x = 5^{2x+1}$ .

Решение: Прологарифмировав обе части данного уравнения по основанию 3, получаем:  $\log_3 3^x = \log_3 5^{2x+1}$ , откуда, по свойству логарифма,  $x \log_3 3 = (2x+1) \log_3 5$ . Так как  $\log_3 3 = 1$ , то полученное уравнение примет вид  $x = (2x+1) \log_3 5$ . Если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить

$$(1 - 2 \log_3 5)x = \log_3 5, \text{ откуда } x = \frac{\log_3 5}{(1 - 2 \log_3 5)}, \text{ или } x = \frac{\log_3 5}{\log_3 \frac{3}{25}}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\log_3 5}{\log_3 \frac{3}{25}}.$$

### 7. Искусственный метод

Искусственный метод заключается в нестандартном решении данного уравнения. Требуется «заметить» какую-то особенность исходного уравнения. Рассмотрим примеры решения не совсем простых уравнений.

Пример 13. Решить уравнение  $5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500$ .

Решение: Уравнение можно решать так: замечаем, что  $x \in \mathbb{N}$ , т.е. решения данного уравнения следует искать среди чисел 2, 3, 4, ... Понятно, что при любом таком значении  $x$  выражение  $\sqrt[3]{8^{x-1}} > 1$ . Замечаем, что при  $x = 4$  выражение  $5^x$  равно 625. И если его умножить на число большее единицы, то получим число, которое больше 500. Вывод:  $x < 4$  (!) Итак, корень уравнения следует искать среди чисел 2 и 3;  $x = 2$  не подходит, левая часть уравнения заведомо меньше правой. При  $x = 3$  получаем тождество  $5^3 \cdot \sqrt[3]{8^2} = 125 \cdot 4 = 500$ .

Ответ:  $x = 3$ .

Пример 14. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4. \quad (4)$$

Решение: Можно заметить, что  $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$ . Значит,

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}. \text{ Обозначим } \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0. \text{ Получаем}$$

$$\frac{1}{t} + t = 4, \text{ т.е. } t^2 - 4t + 1 = 0, \text{ откуда } t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ Стало быть}$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3} \text{ и } \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}, \text{ т.е. } x_1 = 2, x_2 = -2.$$

Ответ:  $x_1 = 2, x_2 = -2$ .

Замечание. Уравнения вида (4) называют показательными уравнениями с взаимно обратными основаниями.

В определенном смысле к показательным уравнениям примыкают так называемые показательно-степенные уравнения. Это

уравнения вида  $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$ . Если известно, что  $f(x) > 0$  и  $f(x) \neq 1$ , то это уравнение, как и показательное, решается с помощью приравнивания показателей:  $g(x) = h(x)$ . Если условием не исключаются возможности  $f(x) \leq 0$ ,  $f(x) = 1$ , приходится рассматривать несколько случаев, как это сделано в следующем примере.

Пример 15. Решить уравнение

$$(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}. \quad (5)$$

Решение: При решении этого показательного уравнения возможны пять случаев:

$$1) x^2 + x - 57 = 1; \quad 2) x^2 + x - 57 = -1;$$

$$3) x^2 + x - 57 = 0;$$

$$4) \begin{cases} x^2 + x - 57 > 0, \\ x^2 + x - 57 \neq 1; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x^2 + x - 57 < 0, \\ x^2 + x - 57 \neq -1. \end{cases}$$

Рассмотрим эти случаи.

$$1) x^2 + x - 57 = 1, \text{ т.е. } x^2 + x - 58 = 0.$$

В этом случае уравнение (5) принимает вид  $1^{3x^2+3} = 1^{10x}$ , т.е.  $1 = 1$ . Значит, корни уравнения  $x^2 + x - 58 = 0$  являются и корнями уравнения (5). Из уравнения  $x^2 + x - 58 = 0$  находим

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}.$$

$$2) x^2 + x - 57 = -1, \text{ т.е. } x^2 + x - 56 = 0.$$

В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$(-1)^{3x^2+3} = (-1)^{10x}. \quad (6)$$

Уравнению (6) могут удовлетворять только такие значения  $x$ , при которых  $3x^2 + 3$  и  $10x$  — целые числа (поскольку отрицательное число  $(-1)$  можно возвести лишь в целую степень) одинаковой четности (т.е. либо оба четные, либо оба нечетные).

Из уравнения  $x^2 + x - 56 = 0$  находим  $x_1 = -8$ ,  $x_2 = 7$ . Значение  $x_1 = -8$  не удовлетворяет уравнению (6), а значение  $x_2 = 7$  удовлетворяет. Значит,  $x = 7$  — корень уравнения (5).

3)  $x^2 + x - 57 = 0$ . В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$0^{3x^2+3} = 0^{10x}. \quad (7)$$

Уравнению (7) могут удовлетворять только такие значения  $x$ , при которых  $3x^2 + 3 > 0$  (это верно при всех  $x$ ) и  $10x > 0$  (это верно при  $x > 0$ ), в этом случае уравнение (7) примет вид  $0 = 0$  (напомним, что выражение  $0^r$  имеет смысл лишь при  $r > 0$ ).

Из уравнения  $x^2 + x - 57 = 0$  находим  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{229}}{2}$ .

Значение  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{229}}{2}$  не удовлетворяет условию  $10x > 0$ , а

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$  удовлетворяет этому условию. Значит,

$x = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$  — корень уравнения (5).

4) Если  $x^2 + x - 57 > 0$  и  $x^2 + x - 57 \neq 1$ , то из уравнения

(5) заключаем, что  $3x^2 + 3 = 10x$ , откуда находим  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

Ни один из этих корней не удовлетворяет неравенству  $x^2 + x - 57 > 0$ .

5) Если  $x^2 + x - 57 < 0$  и  $x^2 + x - 57 \neq -1$ , то опять от уравнения (5) переходим к уравнению следствию  $3x^2 + 3 = 10x$ ,

откуда находим  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ . Обязательна проверка этих корней

подстановкой в исходное уравнение (5). При  $x_1 = 3$  получаем

$(-45)^{30} = (-45)^{30}$  — верное равенство, при  $x_2 = \frac{1}{3}$  получаем

$\left(-56\frac{5}{9}\right)^{\frac{10}{3}} = \left(-56\frac{5}{9}\right)^{\frac{10}{3}}$  – неверное равенство (возведение отрицательного числа в дробную степень не имеет смысла, т.к. по определению степени с рациональным показателем, степенью числа  $a > 0$  с рациональным показателем  $r = \frac{m}{n}$ , где  $m$  – целое число, а  $n$  –

натуральное ( $n > 1$ ), называется число  $\sqrt[n]{a^m}$ .) Значит, лишь  $x = 3$  – корень уравнения (5).

Подводя итоги, приходим к выводу, что уравнение (5) имеет пять корней:  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$ ,  $x_3 = 7$ ,  $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ ,  $x_5 = 3$ .

Ответ:  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$ ,  $x_3 = 7$ ,  $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ ,  $x_5 = 3$ .

Некоторые показательные уравнения сводятся к рассмотренным выше, если преобразовать отдельные их элементы, используя основное логарифмическое тождество:  $a^{\log_a b} = b$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ .

Пример 16. Решить уравнение  $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$ .

Решение: ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Согласно сделанному замечанию преобразуем второе слагаемое в левой части уравнения:

$$x^{\log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}$$

Подставляя полученное выражение в исходное уравнение, получаем

$$2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162, \text{ откуда}$$

$$3^{\log_3^2 x} = 81 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = -2. \end{cases}$$

Решая полученную совокупность уравнений, находим  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = \frac{1}{9}$ .

Ответ:  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = \frac{1}{9}$ .

### 8. Функционально-графический метод

Речь идет об использовании графиков функций или различных свойств функций при решении уравнений.

Пример 17. Решить графически уравнение  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$ .

Предлагаем решить данное уравнение самостоятельно, воспользовавшись следующим указанием.

Указание: В одной системе координат построить графики функций  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  и  $y = x + 1$ . Абсцисса точки пересечения этих графиков будет решением данного уравнения.

**Замечание.** Графическим методом мы сможем определить число корней уравнения и либо найти точные значения корней (хотя и редко, но это все-таки удастся), либо угадать их, что совсем не плохо.

В отличие от графического метода, функциональный метод, который основан на тех или иных свойствах функций, позволяет находить точные корни уравнения или неравенства, при этом не требуется построения графиков функций.

Вот очень яркая разновидность функционально-графического метода: если одна из функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  убывает, а другая возрастает на промежутке  $X$ , то на этом промежутке уравнение  $f(x) = g(x)$  либо имеет только один корень (рис. 1, а), либо вообще не имеет корней (рис. 1, б). В подобных случаях графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  даже не надо чертить: если мы установили разную монотонность функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  и каким-то образом подобрали (угадали) один корень уравнения  $f(x) = g(x)$ , то уравнение полностью решено – этот корень единственный.

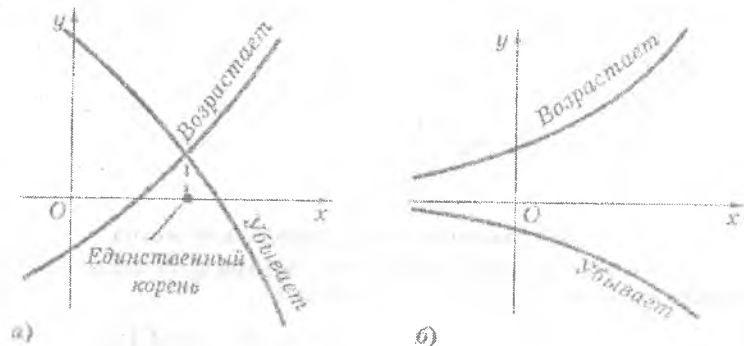


Рис. 1

Пример 18. Решить уравнение  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$ .

Решение: Можно заметить, что при подстановке  $x = 1$  получается  $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = 2$ , т.е.  $x = 1$  – корень уравнения, и т.к. функция

$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$  убывает, а функция  $y = 2^x$  возрастает, то других

корней это уравнение не имеет.

Ответ:  $x = 1$ .

Пример 19. Решить уравнение  $5^x + 12^x = 13^x$ .

Решение: Нетрудно заметить, что  $x = 2$  – корень уравнения. Но рассуждать так же, как в предыдущем примере мы не можем: все функции, составляющие уравнение ( $5^x$ ,  $12^x$ ,  $13^x$ ), имеют одинаковый характер монотонности – возрастают. Поступим так: разделим обе части уравнения почленно на  $12^x$ . Получим:

$\left(\frac{5}{12}\right)^x + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^x$ . Вот теперь все в порядке: функция  $y = \left(\frac{5}{12}\right)^x + 1$

убывает, а функция  $y = \left(\frac{13}{12}\right)^x$  возрастает, значит, можно сделать

вывод о единственности найденного корня.

Ответ:  $x = 2$ .

При решении некоторых показательных уравнений полезно использовать понятия области определения и области значений функции.

Областью определения функции  $y = f(x)$  называется множество значений переменной  $x$ , при которых функция имеет смысл.

Пусть дано уравнение  $f(x) = g(x)$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  – элементарные функции, определенные на множествах  $D_1$  и  $D_2$ . Тогда область  $D$  допустимых значений уравнения будет множество, состоящее из тех значений  $x$ , которые принадлежат обоим множествам, т.е.  $D = D_1 \cap D_2$ . Ясно, что когда множество  $D$  пустое ( $D = \emptyset$ ), то уравнение решений не имеет.

Рассмотрим пример.

Пример 20. Решить уравнение

$$\sqrt{(3^x - 2)^2} + \sqrt{(3^x - 9)(3^x - 1)} = 3^x - 2.$$

$$\text{Решение: ОДЗ: } \begin{cases} 3^x - 2 \geq 0, \\ (3^x - 9)(3^x - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \log_3 2, \\ \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Далее решаем данное уравнение в множестве  $[2; +\infty)$ . Уравнение  $(3^x - 9)(3^x - 1) = 0$  является следствием данного уравнения. Его корни:  $x_1 = 0$  (не удовлетворяет ОДЗ) и  $x_2 = 2$  (удовлетворяет ОДЗ).

Ответ:  $x = 2$ .

Областью значений функции  $y = f(x)$  называется множество значений переменной  $y$  при допустимых значениях переменной  $x$ .

Пусть дано уравнение  $f(x) = g(x)$ , где  $f(x)$ ,  $g(x)$  – элементарные функции, определенные на множествах  $D_1$ ,  $D_2$ . Обозначим область значений этих функций соответственно  $E_1$ ,  $E_2$ . Если  $x_1$  является решением уравнения, то будет выполняться числовое равенство  $f(x_1) = g(x_1)$ , где  $f(x_1)$  – значение функции  $f(x)$  при

$x = x_1$ , а  $g(x_1)$  – значение функции  $g(x)$  при  $x = x_1$ . Значит, если уравнение имеет решение, то области значений функций  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют общие элементы ( $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ ). Если же таких общих элементов множества  $E_1$  и  $E_2$  не содержат, то уравнение решений не имеет.

Пример 21. Решить уравнение  $\left(\frac{4}{3}\right)^x = -2x^2 + 6x - 9$ .

*Решение:* Область допустимых значений уравнения есть множество всех действительных чисел. Показательная функция  $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$  принимает только положительные значения, а функция  $g(x) = -2x^2 + 6x - 9$  – только отрицательные значения. Множества значений этих функций не имеют общих элементов, и, следовательно, уравнение решений не имеет.

*Ответ:* решений нет.

Пример 22. Решить уравнение  $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$ .

*Решение:* Оценим левую и правую части уравнения.

$$1. x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 2^{(x-2)^2+1} \geq 2.$$

$$2. 0 \leq \sin^2 \frac{\pi x}{4} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4} \leq 2.$$

$$3. \text{Следовательно, равенство достигается, если } \begin{cases} 2^{(x-2)^2+1} = 2, \\ 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4} = 2. \end{cases}$$

4. Из первого уравнения системы находим  $x = 2$ . Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и второго уравнения системы. следовательно,  $x = 2$  – решение системы и корень исходного уравнения.

*Ответ:*  $x = 2$ .

При решении некоторых показательных уравнений можно использовать свойства четности или нечетности функции.

Функция  $f(x)$  называется *четной*, если для любого значения  $x$ , взятого из области определения функции, значение  $-x$  также принадлежит области определения и выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ .

Функция  $f(x)$  называется *нечетной*, если для любого значения  $x$ , взятого из области определения функции, значение  $-x$  также принадлежит области определения и выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ .

Из определений следует, что области определения четной и нечетной функций симметричны относительно нуля, т.е. начала координат (необходимое условие).

Для любых двух симметричных значений аргумента из области определения четная функция принимает равные числовые значения, а нечетная – равные по абсолютной величине, но противоположного знака.

*Теорема 1.* Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

*Теорема 2.* Произведение и частное двух нечетных функций представляют собой четные функции.

Пусть имеем уравнение  $F(x) = 0$ , где  $F(x)$  – четная или нечетная функция. Чтобы решить это уравнение достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, после чего записываются отрицательные (или положительные) корни, симметричные полученным, и для нечетной функции корнем будет  $x = 0$ , если это значение входит в область определения  $F(x)$ . Для четной функции значение  $x = 0$  проверяется непосредственной подстановкой в уравнение.

Пример 23. Решить уравнение  $8^{|x|} = 2^{|x+2|+|x-2|}$ .

*Решение:* В обеих частях уравнения имеем четные функции. Поэтому достаточно найти решения для  $x \geq 0$ . Т.к.  $x = 0$  не является корнем уравнения, рассмотрим два промежутка:  $(0; 2]$ ,  $(2; +\infty)$ .

а) На промежутке  $(0; 2]$  имеем:

$$8^x = 2^{x+2-x+2}, 2^{3x} = 2^4, x = \frac{4}{3}.$$

б) На промежутке  $(2; +\infty)$  имеем:

$$8^x = 2^{x+2+x-2}, 2^{3x} = 2^{2x}, 3x = 2x, x = 0.$$

Но т.к.  $x = 0$  не является корнем уравнения, то для  $x > 0$  данное уравнение имеет корень  $x = \frac{4}{3}$ . Тогда  $x = -\frac{4}{3}$  также является корнем уравнения.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}.$$

### Системы показательных уравнений

При решении систем показательных уравнений используются приемы решения систем алгебраических уравнений (метод линейного преобразования системы (или метод алгебраического сложения); метод подстановки; метод замены переменных) и методы решения показательных уравнений. Рассмотрим примеры.

Пример 24. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30, \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5}. \end{cases}$$

*Решение:* Положив  $u = 25^x, v = 25^y$ , где

$u > 0, v > 0$ , получим систему уравнений 
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 30, \\ uv = 5\sqrt{5}, \end{cases}$$
 имеющую

четыре решения:

$$\begin{cases} u_1 = 5, \\ v_1 = \sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \sqrt{5}, \\ v_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} u_3 = -5, \\ v_3 = -\sqrt{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} u_4 = -\sqrt{5}, \\ v_4 = -5. \end{cases}$$

Но лишь первые два решения удовлетворяют условию  $u > 0, v > 0$ .

Таким образом, задача сводится к решению следующей

совокупности систем уравнений: 
$$\begin{cases} 25^x = 5, \\ 25^y = \sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} 25^x = \sqrt{5}, \\ 25^y = 5. \end{cases}$$

Из первой системы находим:  $x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{4}$ , из второй:

$$x_2 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Пример 25. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

*Решение:* Перемножив почленно уравнения данной системы, получим уравнение  $2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 216$ , или  $6^{x+y} = 6^3$ , откуда  $x + y = 3$ .

Разделив почленно первое уравнение исходной системы на второе, получим уравнение  $2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3}$ , или  $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}$ , откуда  $x - y = 1$ .

Таким образом, решение данной системы сводится к решению следующей системы уравнений: 
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Пара  $(2; 1)$  является решением этой системы и, следовательно, данной системы.

$$\text{Ответ: } (2; 1).$$

Пример 26. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x^{2y^2-9y+9} = 8, \\ x^{y^2-5y+6} = 4. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ: 
$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Взяв логарифмы по основанию 2 от обеих частей каждого из уравнений данной системы, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2 x^{2y^2-9y+9} = 3, \\ \log_2 x^{y^2-5y+6} = 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (2y^2-9y+9)\log_2 x = 3, \\ (y^2-5y+6)\log_2 x = 2. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение этой системы на второе (это деление не приведет к потере решений, т.к. ясно, что  $y^2 - 5y + 6 \neq 0$  и  $x \neq 1$ , т.е.  $\log_2 x \neq 0$ ):

$$\frac{2y^2-9y+9}{y^2-5y+6} = \frac{3}{2},$$

откуда  $y_1 = 3, y_2 = 0$ .

Таким образом, решение данной системы свели к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y = 3, \\ (y^2 - 5y + 6)\log_2 x = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ (y^2 - 5y + 6)\log_2 x = 2. \end{cases}$$

Первая система этой совокупности решений не имеет, а пара  $(\sqrt[3]{2}; 0)$  – решение второй системы – является решением и данной системы.

Ответ:  $(\sqrt[3]{2}; 0)$ .

### Показательные неравенства

Простейшими показательными неравенствами являются неравенства вида

$$a^x > b, a^x < b, \quad (8)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые действительные числа ( $a > 0, a \neq 1$ ).

В зависимости от значений параметров  $a$  и  $b$  множество решений неравенства  $a^x > b$  представляется в виде:

при  $a > 1, b > 0$   $x \in (\log_a b; +\infty)$ ;  
 при  $a < 1, b > 0$   $x \in (-\infty; \log_a b)$ ;  
 при  $b < 0$   $x \in R$ .

Множество решений неравенства  $a^x < b$  в зависимости от значений  $a$  и  $b$  представляется в виде:

при  $a > 1, b > 0$   $x \in (-\infty; \log_a b)$ ;  
 при  $a < 1, b > 0$   $x \in (\log_a b; +\infty)$ ;  
 при  $b < 0$   $x = \emptyset$ .

Множество решений нестрогих неравенств  $a^x \geq b$  и  $a^x \leq b$  находится как объединение множеств решений соответствующих строгих неравенств и уравнения  $a^x = b$ .

Неравенства вида (8) могут быть обобщены на случай, когда в показателе степени стоит некоторая функция от  $x$ . Так, множество решений неравенства

$$2^{f(x)} > 3 \quad (9)$$

находится как множество решений неравенства  $f(x) > \log_2 3$ , эквивалентного неравенству (9).

Методы сведения более сложных показательных неравенств к неравенствам вида (8), (9) аналогичны методам, используемым при решении показательных уравнений. Так, например, решение показательного неравенства вида

$$P(a^x) > 0,$$

где  $P(a^x)$  – многочлен указанного аргумента, заменой  $a^x = t$  сводится к последовательному решению неравенства  $P(t) > 0$  и решению простейших показательных неравенств вида (8) или систем простейших показательных неравенств. (Например, см. пример 29.)

Решение показательных неравенств вида  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ , где

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases} \text{ основано на следующих двух теоремах:}$$

**Теорема 1.** Если  $a > 1$ , то неравенство  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  равносильно неравенству  $f(x) > g(x)$ .

**Теорема 2.** Если  $0 < a < 1$ , то неравенство  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  равносильно неравенству  $f(x) < g(x)$ .

Частные случаи:

I. Пусть  $a^{f(x)} > 1$ . Тогда

1) при  $a > 1$ ,  $f(x) > 0$ , 2) при  $0 < a < 1$ ,  $f(x) < 0$ .

II. Пусть  $a^{f(x)} < 1$ . Тогда

1) при  $a > 1$ ,  $f(x) < 0$ , 2) при  $0 < a < 1$ ,  $f(x) > 0$ .

Пример 27. Решить неравенство  $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$ .

Решение: ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq \frac{7}{3}. \end{cases}$

Преобразуем данное неравенство к виду

$$2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} < 2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}.$$

По теореме 1 данное неравенство равносильно неравенству  $\frac{3x-1}{3(x-1)} < \frac{3(x-3)}{3x-7}$ . Из этого неравенства последовательно получаем неравенства

$$\frac{3x-1}{3x-3} - \frac{3x-9}{3x-7} < 0, \quad \frac{12x-20}{(3x-3)(3x-7)} < 0, \quad \frac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)} < 0.$$

Из последнего неравенства получаем  $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$ , которое является и решением данного неравенства.

Ответ:  $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$ .

Пример 28. Решить неравенство  $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$ .

Решение: Последовательно получаем

$$4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x,$$

$$-20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x,$$

$$2^x < 5^x.$$

Разделив обе части последнего неравенства на  $5^x > 0$ , получим

равносильное неравенство  $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1$ , или  $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0$ . Здесь

основание удовлетворяет двойному неравенству  $0 < \frac{2}{5} < 1$ . Значит, по

теореме 2 неравенство  $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0$  равносильно неравенству

противоположного смысла  $x > 0$ . Итак, промежуток  $(0; +\infty)$  является решением данного неравенства.

Ответ:  $(0; +\infty)$ .

Пример 29. Решить неравенство  $5^{\sqrt{x+1}} - 5^{2\sqrt{x-1}} - 20 > 0$ .

Решение: ОДЗ:  $x \geq 0$ .

Перепишем исходное неравенство следующим образом:

$$5 \cdot 5^{\sqrt{x}} - \frac{1}{5} \cdot 5^{2\sqrt{x}} - 20 > 0.$$

После замены  $5^{\sqrt{x}} = t$ ,  $t > 0$ , получим неравенство

$$-\frac{1}{5}t^2 + 5t - 20 > 0,$$

и далее  $t^2 - 25t + 100 < 0$ , или  $(t-5)(t-20) < 0$ , откуда  $5 < t < 20$ .

Таким образом, решение заданного неравенства сводится к решению системы неравенств  $5 < 5^{\sqrt{x}} < 20$ , или  $5 < 5^{\sqrt{x}} < 5^{\log_5 20}$ .

Эта система равносильна (т.к. основание  $5 > 1$ ) системе  $1 < \sqrt{x} < \log_5 20$ , откуда  $1 < x < \log_5^2 20$ . Итак, промежуток

$(1; \log_5^2 20)$  является решением заданного неравенства.

Ответ:  $(1; \log_5^2 20)$ .

Пример 30.

Решить неравенство  $(x^2 + x + 1)^x < 1$ . (10)

*Решение:* Так как дискриминант квадратного трехчлена  $x^2 + x + 1$  отрицателен, а коэффициент при  $x^2$  положителен, то  $x^2 + x + 1 > 0$  при всех действительных значениях  $x$ . Поэтому правую часть неравенства (10) можно представить как  $(x^2 + x + 1)^0$  и переписать неравенство (10) следующим образом:

$$(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0. \quad (11)$$

Так как относительно основания  $x^2 + x + 1$  неизвестно, больше оно единицы или меньше, то следует рассмотреть обе эти возможности.

Если  $x^2 + x + 1 > 1$ , то к неравенству (11) применима теорема 1.

Если же  $x^2 + x + 1 < 1$ , то к неравенству (11) применима теорема 2. Таким образом, неравенство (11) равносильно следующей совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 < 1, \\ x > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(x+1) < 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 1, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, а из второй системы найдем промежуток  $(-\infty; -1)$ , являющийся решением неравенства (10).

*Ответ:*  $(-\infty; -1)$ .

В общем случае неравенства видов  $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)}$  и  $(f(x))^{g(x)} < (f(x))^{h(x)}$  равносильны следующим совокупностям:

$$(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x); \end{cases}$$

$$(f(x))^{g(x)} < (f(x))^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) < h(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > h(x). \end{cases}$$

## Упражнения

### 1. Решить уравнения:

1)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16};$

2)  $6^{2x+1} = 2^{3x} \cdot 3^{x+2};$

3)  $5^{2x+5} - 2^{2x+10} = 2^{2x+8} - 3 \cdot 5^{2x+2};$

4)  $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-\frac{1}{2}} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2} - 81;$

5)  $4 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 12 \cdot 36^{\frac{1}{x}} + 9 \cdot 16^{\frac{1}{x}} = 0;$

6)  $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34 \cdot 15^{2x-x^2};$

7)  $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{2^{3x+3}} + 12 = 0;$

8)  $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}};$

9)  $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}};$

10)  $3^{|x|} = 5^{x^2+3x};$

11)  $2^{-x} = 3x + 10;$

12)  $3^x + 4^x = 5^x.$

### 2. Решить неравенства:

1)  $0,3^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1;$  2)  $6^{\sqrt[10]{x}} \leq 10^{\sqrt[6]{x}};$  3)  $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x;$

4)  $4^{\frac{3}{2}x} + 2^{x-\sqrt{x}} < 3 \cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}};$  5)  $\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1};$

6)  $\sqrt{8 \cdot 16^x - \frac{1}{2} \cdot 9^x} \leq 3 \cdot 4^x - 3^x;$  7)  $(\sqrt{2} + 1)^x + 1 < 2(\sqrt{2} - 1)^x;$

$$8) \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x+3)^3(x-5)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1; \quad 9) \left|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}\right| \leq \frac{5x}{3} - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}};$$

$$10) 5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}; \quad 11) (x-1)^{x^2-5x+6} \leq 1;$$

$$12) 2^x \geq 11 - x.$$

3. Решить системы:

$$1) \begin{cases} (2^{x+y})^{x^2-xy-8} = 1, \\ (0,37^{x-y})^{x^2+xy-16+2x} = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (y+1)^x = 10000, \\ (y^2-1)^{2x-2} = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{3^y}{27} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2^{-x} \cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \sqrt{2(5^x+24)} - \sqrt{5^x-7} \geq \sqrt{5^x+7}, \\ 2^{2x+2} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0. \end{cases}$$

### Домашнее задание

Решить показательные уравнения, неравенства и их системы:

Вариант I

$$\sqrt{2} \cdot 0,5^{4\sqrt{x+10}} - 16^{\frac{1}{2(\sqrt{x+1})}} = 0;$$

$$3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2;$$

$$2^{1-|4x-1|} = \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \pi x;$$

$$\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x+1}}} - 4^{\sqrt{3-x}} + 2^{\sqrt{3-x+1}} > 5;$$

$$(x^2 - 6x + 8)^{x-3} < 1;$$

$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \end{cases}$$

Вариант II

$$6^{x+1} + 3^{x+1} = 3^{x+2} - 6^x + 3^x;$$

$$(5 + 2\sqrt{6})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = 12;$$

$$\sqrt{(3-6^x)^2} + \sqrt{(6^x-1)(6^x-11)} = 6^x - 3$$

$$5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x;$$

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1;$$

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$$

Вариант III

$$16^x = 4^{|x+1|};$$

$$\sqrt{5 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x + 3^{2x}} + 2 \cdot 3^x = 1;$$

$$|2x^2 - 3x - 5| + 7^{2x^2-3x-5} = 0;$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}};$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} \leq 1;$$

$$\begin{cases} 9 \cdot 3^x \cdot 2^y = 1 \\ 3^y = 9 \cdot 3^x \end{cases}$$

Вариант IV

$$\frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^x;$$

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0;$$

$$2^{1-|x-1|} = x^2 - 2x + 3;$$

$$\sqrt{13^x - 5} \leq \sqrt{2 \cdot (13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$$

$$(x-3)^{x^2-7x} > 1;$$

$$\begin{cases} x^{\sqrt{x+\sqrt{y}}} = y^{\frac{8}{3}} \\ y^{\sqrt{x+\sqrt{y}}} = x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Вариант V

$$4^{x+2} - 10 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x+3} + 11 \cdot 2^{2x} = 0; \quad (x-2)^{x^2-6x+8} > 1;$$

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8; \quad \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648 \\ 3^x \cdot 2^y = 432 \end{cases}$$

$$\sqrt{(11-6^x)^2} + \sqrt{(6^x-6)(6^x-36)} = 6^x - 11$$

$$3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}};$$

Вариант VI

$$3^{2x^2-5x+6} = 18 + 6 + 2 + \dots; \quad (x^2 - 8x + 16)^{x-6} < 1;$$

$$5^{2x} - 7^x - 17 \cdot 5^{2x} + 7^x \cdot 17 = 0; \quad \begin{cases} 2^{2x} + 4^{2y} = 28 \\ 3^x - 4^y = 8 \end{cases}$$

$$\sqrt{(4-2^x)^2} + \sqrt{4^x - 18 \cdot 2^x + 32} = 2^{x+1} - 8$$

$$\sqrt{4^{x+1} + 17} - 5 > 2^x;$$

Вариант VII

$$5^{2x} - 7^x = 35 \cdot 5^{2x} - 35 \cdot 7^x; \quad |x|^{x^2-x-2} < 1;$$

$$4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}; \quad \begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56 \\ 3 \cdot 2^x + 3^{x+y+1} = 87 \end{cases}$$

$$3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2} = 5 + 4 \sin 2\pi x;$$

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49};$$

Вариант VIII

$$3 \cdot 5^{-4x-3} - 2^{1-4x} + 5^{-4x-2} - 2^{-4x-1} = 0; \quad (x^2 - 8x + 8)^{x-0,2} < 1;$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{81} - 10 \cdot \sqrt[3]{9} + 3 = 0; \quad \begin{cases} 27^{2x} + 27^{2y} = 12 \\ 27^{x+y} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$3^{|x|} = \cos \frac{x}{3};$$

$$4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x+x}} + 4^{1+\sqrt{x}};$$

Вариант IX

$$\sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{10x+5} - 3x \sqrt[3]{27^{3x-7}} = 0; \quad (x^2 - 8x + 15)^{x-6} < 1;$$

$$16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x; \quad \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 65 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 5 \end{cases}$$

$$5^{|1-4x^2|} = \sin \pi x;$$

$$5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}};$$

Вариант X

$$3^{2x+5} - 2^{2x+7} = 2^{2x+4} - 3^{2x+4}; \quad (x-3)^{2x^2-7x} > 1;$$

$$125 \cdot \sqrt[3]{4} - 70 \cdot \sqrt[3]{10} + 5 \cdot \sqrt[3]{25} = 0; \quad \begin{cases} x^y = 9 \\ \sqrt[3]{324} = 6x \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)\right|;$$

$$2 \cdot 3^{2x^3} + 4 \leq 3^{x^2+2};$$

Вариант XI

$$4^{\sqrt{x+5}} - 64 \cdot 4^x = 0; \quad |x-3|^{2x^2-7x} > 1;$$

$$10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}; \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x+7y} = 3 \\ (2x+14y) \cdot 2^x = 72 \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2+12x+17} = \sin \frac{\pi}{x^2+6x+13};$$

$$0,008^x + 5^{1-3x} + 0,04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30,04;$$

Вариант XII

$$5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155; \quad \begin{cases} |3x^2 - 2|^{\sqrt{1+x}} > |3x^2 - 2|^{1+\sqrt{x}} \\ x^{2y} + 16 = 3y \cdot x^y + 2y^2 \\ x^{2y} = 4 + 3x^y \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10;$$

$$3^{x^2+4x+4,5} = \sqrt{3} \sin\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right);$$

$$0,3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\dots} < \sqrt[3]{0,3^{3x^2+5x}} < 1;$$

Вариант XIII

$$2^{2x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x} + 4^{x+1} = \sqrt{\frac{1}{4^{3-2x}}} + 74;$$

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x+10}{3x-4}};$$

$$27^{3x^2 + \frac{1}{3}} + 7^{x^4} = 4 - 3tg^2 x;$$

$$\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9;$$

Вариант XIV

$$2^{3x} \cdot 5^x = 1600;$$

$$4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}};$$

$$2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3};$$

$$\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1};$$

Вариант XV

$$9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1;$$

$$4^{\sqrt{x+1,5}} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}} + 20 = 0;$$

$$3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x);$$

$$(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1;$$

Вариант XVI

$$3^{2x-1} \cdot 5^{3x+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^{2x} \cdot 3^{3x};$$

$$14 \cdot 4^{\sqrt{x+1}} + 3 \cdot 14^{\sqrt{x+1}} - 2 \cdot 49^{\sqrt{x+1}} = 0;$$

$$5^x + 5^{-x} = 2 \cos(3x^2 - x);$$

$$(x+3)^{x^2+2x-8} = 1;$$

$$(2x-1)^x \geq (2x-1)^{x^2-2};$$

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{2^4} \\ y^{x+y} = x^6 \end{cases}$$

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1;$$

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ yx^2 = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{27} \cdot 3^{-x^2+5x} < \frac{\sqrt{243}}{3^{x+1}};$$

$$\begin{cases} 3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0 \\ 3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0 \end{cases}$$

$$3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0.$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-|x+2|} \geq 81;$$

$$\begin{cases} 8^{3x^2} > \sqrt[3]{32} \cdot 2^{x+3} \\ |\sqrt{2x-1}| = \sqrt{2x-1} \end{cases}$$

$$|\sqrt{2x-1}| = \sqrt{2x-1}$$

Вариант XVII

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1};$$

$$27 \cdot 2^{4x^2+4} - 3 \cdot 6^{2x^2+2} = 4 \cdot 3^{4x^2+4};$$

$$2^x + 2^{-x} = 2 \cos^2 \frac{x^2+x}{6};$$

$$35^{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot 13^{2\sqrt{x^2-1}} > 35^{x-\sqrt{x^2-1}};$$

Вариант XVIII

$$16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512 \cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}};$$

$$9 \cdot 256^{\sqrt{x}} - 6 \cdot 144^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 81^{\sqrt{x}} = 0;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1;$$

$$\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)^{x-\sqrt{x}} > \left(3-\sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}};$$

Вариант XIX

$$5 \cdot 2^{2x+2} + 3 \cdot 2^{2x-1} \geq 86;$$

$$\left(4 + \sqrt{15}\right)^x + \left(4 - \sqrt{15}\right)^x = 62;$$

$$125 \cdot 0,25^x = (x+1)^3;$$

$$|x|^{x^2-2x} = 1;$$

Вариант XX

$$\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81;$$

$$7^{2x+1} + 4 \cdot 21^x = 3^{2x+1};$$

$$e^{-x} = \frac{2x-1}{x-1};$$

$$9^{2x^2-5x} + 3^{2x^2-5x+1} - 4 > 0;$$

$$(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12};$$

$$\begin{cases} x^2 + 2^{y+2} \geq y^4 - 4x + 13 \\ x^2 - y^2 \leq 4 - 2^{y+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2 \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \end{cases}$$

$$(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x};$$

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2 \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} \leq 162;$$

$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3| - \log_2 3} = 3^{-y-4} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3| - \log_2 3} = 3^{-y-4} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

$$|x^2 - 3|^{x^2-4x-5} \leq 1;$$

$$\begin{cases} \frac{y+3x}{2^x y} = 16 \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{2x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Вариант XXI

$$8^{3x-7} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{0,25^{3x-1}}} = 1;$$

$$2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^x = 0;$$

$$4 \cdot 2,5^{7-x} = 21 + \sqrt{3x+1};$$

$$3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} > 4^x + 4^{x+1};$$

Вариант XXII

$$0,6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3;$$

$$0,2^{x+1} = \sqrt{35+5x};$$

$$\begin{cases} 25 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2} = \frac{1}{5^{2x}} \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+y+14} = \sqrt{x+y+12} \end{cases};$$

Вариант XXIII

$$2^{x^2} \cdot 5^{x^2} \geq 0,001 \cdot (10^{3-x})^2;$$

$$3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0;$$

$$0,25^{x+4} = \sqrt{46+6x};$$

$$(x+2)^{x^2} = (x+2)^{3x-2};$$

Вариант XXIV

$$\sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{\frac{1}{x}}} \leq 4 \cdot \sqrt[3]{2};$$

$$100^x - 80 \cdot 10^{x-1} = 20;$$

$$40 \cdot 0,04^x = (2x+1)^3;$$

$$x^{x^2-5x+6} = 1;$$

$$(x-3)^{x^2+x} = (x-3)^{7x-5};$$

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1 \\ 2^x \leq 2y \end{cases}$$

$$(x-1)^{3x+1} = (x-1)^{2x+4};$$

$$5^x - 5^{3-x} > 20;$$

$$2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1.$$

$$2 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 5 > 3^{1-\sqrt{x}};$$

$$\begin{cases} x^y = 243 \\ (1024)^{\frac{1}{y}} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \end{cases}$$

$$9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}};$$

$$\begin{cases} y^{x^2-7x+12} = 1 \\ x+y = 6 \end{cases}$$

Вариант XXV

$$3 \cdot 7^{x+1} + 5 \cdot 7^{x-1} = 152;$$

$$4^{\sqrt{x-2}} + 16 > 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}};$$

$$\sqrt[3]{10x-2} = 0,25^x - 35;$$

$$(1-x^2)^{(2+x)^2} = (1-x^2)^{8x-2(x+2)};$$

$$0,36^{0,5x^2-3} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{-3};$$

$$\begin{cases} (2^{x+1} - 3) \cdot 2^{y-1} = 1 \\ \sqrt{3x+y^2} = x+y \end{cases}$$

#### IV. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

*Определение.* Логарифмом положительного числа  $b$  по основанию  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить  $b$ :  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ .

Определение логарифма можно кратко записать так:  $a^{\log_a b} = b$ . Это равенство справедливо при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ . Равенство называют *основным логарифмическим тождеством*.

##### Свойства логарифмов

Для  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  справедливы следующие равенства:

$$1^0. \log_a a = 1.$$

$$2^0. \log_a 1 = 0.$$

$$3^0. \log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

$$4^0. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

$$5^0. \log_a x^p = p \log_a x, \text{ где } p - \text{любое действительное число.}$$

$$6^0. \log_{a^q} x = \frac{1}{q} \log_a x, \text{ где } q - \text{любое отличное от нуля}$$

действительное число.

$$7^0. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

$$8^0. \log_a x = \frac{1}{\log_x a}.$$

$$9^0. \log_{a^p} x^p = \log_a x.$$

$$10^0. a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, \text{ где } c > 0, c \neq 1.$$

##### Логарифмические уравнения

*Определение.* Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком логарифма. Уравнение вида

$$\log_a x = v, \text{ где } a > 0, a \neq 1 \quad (1)$$

называют *простейшим логарифмическим уравнением* с областью допустимых значений  $x > 0$ . Его решением является  $x = a^v$ .

Пример 1. Решить уравнение  $\log_3 x = 2$ .

*Решение:* ОДЗ:  $x > 0$ .

$x = 3^2$  удовлетворяет ОДЗ.

*Ответ:*  $x = 9$ .

Логарифмическое уравнение, в котором под знаком логарифма стоит некоторая функция  $f(x)$ ,

$$\log_a f(x) = b, \text{ } a > 0, a \neq 1, \quad (2)$$

имеет множество допустимых значений  $x$ , задаваемых неравенством  $f(x) > 0$ , и эквивалентно уравнению

$$f(x) = a^b.$$

Пример 2. Решить уравнение  $\log_2(x^2 - 6x) = 4$ .

*Решение:* ОДЗ:  $x^2 - 6x > 0$ , т.е.  $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$ .

$x^2 - 6x = 2^4$ ,  $x^2 - 6x - 16 = 0$ , откуда  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 8$ . Оба корня удовлетворяют ОДЗ уравнения.

*Ответ:*  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 8$ .

Решение логарифмических уравнений сведением к простейшим логарифмическим уравнениям.

Некоторые логарифмические уравнения решаются с использованием основных свойств логарифмов  $1^0 - 10^0$ , сводящих решение уравнения к решению простейшего логарифмического уравнения.

Пример 3. Решить уравнение  $2 - x + 3 \log_5 2 = \log_5(3^x - 5^{2-x})$

*Решение:* Перенесем логарифм, стоящий в левой части уравнения, в правую часть и, воспользовавшись свойствами логарифмов, запишем уравнение в виде

$$2 - x = \log_5 \left( \frac{3^x - 5^{2-x}}{8} \right).$$

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$\frac{3^x - 5^{2-x}}{8} = 5^{2-x},$$

которое можно записать в виде

$$3^x = 9 \cdot 5^{2-x}, \text{ или } 3^{x-2} = 5^{2-x}, \text{ или } 15^{x-2} = 1.$$

Полученное показательное уравнение равносильно уравнению  $x - 2 = 0$ , решение которого  $x = 2$ .

Множество допустимых значений  $x$  данного уравнения определяется как решение неравенства

$$3^x - 5^{2-x} > 0.$$

При  $x = 2$  данное неравенство справедливо, и, следовательно,  $x = 2$  является решением исходного логарифмического уравнения.

Ответ:  $x = 2$ .

При решении логарифмических уравнений применяются три основных метода:

1) метод потенцирования, т.е. переход от уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , к уравнению-следствию  $f(x) = g(x)$ ;

2) метод введения новой переменной;

3) метод логарифмирования, т.е. переход от уравнения  $f(x) = g(x)$  к уравнению  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Кроме вышеуказанных методов существуют еще несколько вспомогательных методов или частных случаев этих трех методов, с помощью которых исходные уравнения приводятся в уравнения, решаемые потенцированием, или введением новой переменной, или методом логарифмирования.

## Методы решения логарифмических уравнений

### 1. По определению логарифма

Этот метод используется для решения простейших логарифмических уравнений видов  $\log_a x = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , и  $\log_a f(x) = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . (См. решения уравнений вида (1), (2), примеры 1-3.)

Пример 4. Решить уравнение  $\lg(81 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2-8x}}) = 0$ .

Решение: По определению логарифма

$$81 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 10^0, \text{ т.е.}$$

$$3^4 \cdot 3^{\frac{x^2-8x}{3}} = 1, \text{ т.е. } 3^{4+\frac{x^2-8x}{3}} = 3^0.$$

Отсюда  $4 + \frac{x^2-8x}{3} = 0$ , т.е.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 6$ .

Ответ:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 6$ .

Таким образом, простейшие логарифмические уравнения и уравнения, сводящиеся к простейшим логарифмическим уравнениям решаются на основании определения логарифма числа.

Уравнение вида  $\log_{h(x)} f(x) = b$  равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (h(x))^b, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

Пример 5. Решить уравнение  $\log_{x+1}(3x+1) = 2$ .

$$\text{Решение: } \begin{cases} x+1 > 0, & \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases} & \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases} \\ x+1 \neq 1, & \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases} & \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases} \\ 3x+1 = (x+1)^2; & \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases} & \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases} \end{cases}$$

Решаем уравнение  $x^2 - x = 0$ ,  $x(x-1) = 0$ , откуда получаем  $x_1 = 0$ , который не удовлетворяет условию  $x \neq 0$  и  $x_2 = 1$  - корень уравнения.

Ответ:  $x = 1$ .

Пример 6. Решить уравнение  $\log_x(3x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x$ .

Решение: ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Воспользовавшись определением логарифма, преобразуем данное уравнение к виду

$$x^{2\log_5 x} = 3x^{\log_5 x} + 4.$$

Положив  $x^{\log_5 x} = t$ ,  $t > 0$ , получим уравнение  $t^2 - 3t - 4 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 4$ .  $t_1 = -1$  не удовлетворяет условию  $t > 0$ . Поэтому  $x^{\log_5 x} = 4$ . Прологарифмировав обе части полученного уравнения по основанию 5, получаем  $\log_5^2 x = \log_5 4$ , т.е.  $\log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4}$ , откуда находим  $x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$ . Оба найденных корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ:  $x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$ .

**Замечание.** Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма является частным случаем метода потенцирования.

## 2. Метод потенцирования

Логарифмические уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad (3)$$

и уравнения, сводящиеся к этому виду, можно решить одним из следующих способов:

1 способ. Решить уравнение

$$f(x) = g(x), \quad (4)$$

являющееся следствием уравнения (3), и выполнить проверку корней уравнения (4) подстановкой их в заданное уравнение (3). Если уравнение (3) само является следствием некоторого заданного логарифмического уравнения, то проверку найденных корней выполняют подстановкой их в исходное уравнение, а не в уравнение (3).

2 способ. Решить уравнение (4) и проверить корни этого уравнения подстановкой их либо в систему неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \quad (5)$$

которой задается область допустимых значений уравнения (3), либо в неравенства, являющиеся решением системы (5). Если же уравнение (3) само является следствием некоторого заданного логарифмического уравнения, то проверку найденных корней выполняют подстановкой их в неравенства, с помощью которых записывается область допустимых значений исходного уравнения, а не уравнения (3).

3 способ. Этот способ отличается от 2-го способа практически лишь тем, что обращение к неравенствам, с помощью которых записывается область допустимых значений уравнения (3), происходит не в проверке, а уже непосредственно в процессе решения уравнения (3). Применяя этот способ, решают смешанную систему

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

которая составлена из уравнения (4) и неравенств системы (5). Эта смешанная система равносильна уравнению (3). Если же уравнение (3) само является следствием некоторого заданного логарифмического уравнения, то в смешанную систему войдут и неравенства, с помощью которых записывается область допустимых значений исходного уравнения, а не уравнения (3).

Приведение уравнения (3) в уравнение (4) называется *потенцированием*.

Пример 7. Решить уравнение  $\log_3(7-2x) = \log_3(x^2-3x-5)$ .

Решение: Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 7-2x = x^2-3x-5, \\ 7-2x > 0. \end{cases}$$

Эту систему можно переписать как  $\begin{cases} x^2-x-12=0, \\ x < 3,5. \end{cases}$

Откуда  $\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -3, \\ x < 3,5. \end{cases}$

Решением полученной системы является  $x = -3$ .

Ответ:  $x = -3$ .

Пример 8.

Решить уравнение  $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$ .

Решение: ОДЗ:  $\begin{cases} x+4 > 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 1-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ .

Преобразуем данное уравнение к следующему виду:

$$\lg((x+4)(2x+3)) = \lg(1-2x).$$

От этого уравнения перейдем к уравнению

$$(x+4)(2x+3) = (1-2x)$$

и далее  $2x^2+13x+11=0$ , откуда  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -5,5$ . Так как второй корень не удовлетворяет ОДЗ, то решением является только первый корень  $x = -1$ .

Ответ:  $x = -1$ .

Пример 9.

Решить уравнение  $\log_5\left(5^{\frac{1}{x}} + 125\right) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}$ .

Решение: ОДЗ:  $x \neq 0$ .

Так как  $1 + \frac{1}{2x} = \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}$ , то данное уравнение запишем в виде

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{x}} + 125\right) = \log_5 6 + \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}.$$

Далее имеем:

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{x}} + 125\right) = \log_5\left(6 \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{2x}}\right), \text{ т.е. } 5^{\frac{1}{x}} + 125 = 30 \cdot 5^{\frac{1}{2x}}.$$

Полученное показательное уравнение можно решить методом введения новой переменной. Положив  $5^{\frac{1}{2x}} = t$ ,  $t > 0$ , получим уравнение  $t^2 - 30t + 125 = 0$ , корни которого  $t_1 = 5$ ,  $t_2 = 25$ . Оба значения удовлетворяют условию  $t > 0$ .

Теперь задача свелась к решению совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} 5^{\frac{1}{2x}} = 5, \\ 5^{\frac{1}{2x}} = 25. \end{cases}$$

Из первого уравнения совокупности получаем  $\frac{1}{2x} = 1$ , откуда

$$x_1 = \frac{1}{2}.$$

Из второго уравнения совокупности получаем  $\frac{1}{2x} = 2$ , откуда

$$x_2 = \frac{1}{4}.$$

Оба найденных значения удовлетворяют ОДЗ, следовательно, являются корнями исходного уравнения.

Ответ:  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{4}$ .

Логарифмическое уравнение вида

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \quad (6)$$

равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ , рассматриваемому на множестве допустимых значений  $x$ , задаваемом системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Т.е. при решении уравнений вида (6) и уравнений, сводящихся к этому виду, может применяться любой из трех способов, которые применяются при решении уравнений вида (3). Следует лишь учесть, что к неравенствам, с помощью которых записывается область допустимых значений уравнения (3), необходимо добавить еще условия  $h(x) > 0$  и  $h(x) \neq 1$ .

Таким образом, при решении уравнений вида (6) вторым или третьим способом из корней уравнения (4) отбирают лишь те, которые удовлетворяют системе (7).

Пример 10. Решить уравнение  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$ .

Решение: Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x < 5, \\ x > -4, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 2, \\ -4 < x < 5, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Решением полученной системы, а следовательно, и исходного уравнения является  $x = 2$ .

Ответ:  $x = 2$ .

Пример 11.

Решить уравнение  $\log_{\frac{x}{10}} x + \log_{\frac{x}{5}} x = 0$ . (8)

$$\text{Решение: ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ \frac{x}{10} \neq 1, \\ \frac{x}{5} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 10, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Перейдем во всех логарифмах к одному основанию, например, основанию  $x$ . Так как

$$\log_{\frac{x}{10}} x = \frac{\log_x x}{\log_x \frac{x}{10}} = \frac{1}{1 - \log_x 10},$$

а

$$\log_{\frac{x}{5}} x = \frac{\log_x x}{\log_x \frac{x}{5}} = \frac{1}{1 - \log_x 5},$$

то исходное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{1}{1 - \log_x 10} + \frac{1}{1 - \log_x 5} = 0,$$

и далее  $1 - \log_x 5 + 1 - \log_x 10 = 0$ , откуда  $\log_x 50 = 2$ , и тогда  $x^2 = 50$ , следовательно,  $x_1 = 5\sqrt{2}$ ,  $x_2 = -5\sqrt{2}$ . Но области допустимых значений исходного уравнения принадлежит лишь первый корень  $x_1 = 5\sqrt{2}$ , поэтому и является решением.

Однако при переходе в исходном логарифмическом уравнении к основанию  $x$  нас подстерегала другая, более «грозная» опасность, чем опасность приобретения посторонних корней. Так, подставив значение  $x = 1$  в левую часть уравнения (8), убеждаемся, что оно является корнем этого уравнения. Потеря корня произошла при переходе в логарифмическом уравнении к основанию  $x$ , что сужало область допустимых значений уравнения (8) и, следовательно, могло привести (и, как видим, привело) к потере корня.

Итак, корнями уравнения (8) являются  $x_1 = 5\sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1$ .

Ответ:  $x_1 = 5\sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1$ .

*Замечание.* При переходе в уравнении (8) к логарифмам по основанию, не содержащему  $x$ , например, к основанию 10, мы получили бы уравнение  $\frac{\lg x}{\lg x - 1} + \frac{\lg x}{\lg x - \lg 5} = 0$ , корнями которого являются  $x_1 = 5\sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1$ , т.е. потери решения при таком способе не происходит.

### 3. Метод введения новой переменной

Решение логарифмических уравнений, сводящихся заменой переменных к алгебраическому уравнению.

Если логарифмическое уравнение имеет вид

$$f(\log_a x) = 0,$$

где  $f$  — некоторая функция, то заменой  $t = \log_a x$  оно сводится к уравнениям вида (1):

$$\log_a x = t_i,$$

где  $t_i$  — корни уравнения  $f(t) = 0$ .

Пример 12. Решить уравнение  $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$ .

Решение: ОДЗ:  $x > 0$ .

Обозначая  $\log_2 x = t$ , получаем уравнение

$$t^2 - 5t + 6 = 0,$$

корни которого  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 3$ . Таким образом, исходное уравнение равносильно двум уравнениям вида (1):

$$\log_2 x = 2, \quad \log_2 x = 3,$$

решения которых  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 8$ .

Ответ:  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 8$ .

### 4. Метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию (См. пример 11.)

Пример 13. Решить уравнение

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} (4-x) - \log_4 (x+6)^3. \quad (9)$$

$$\text{Решение: ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -2, \\ 4-x > 0, \\ x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-6; -2) \cup (-2; 4).$$

Прежде всего перейдем в уравнении (9) к логарифмам по одному основанию, например, по основанию  $\frac{1}{4}$ . Имеем:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} (4-x) = \log_{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3} (4-x)^3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3;$$

$$\log_4 (x+6)^3 = \log_{4^{-1}} (x+6)^{-3} = -\log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3.$$

Тогда заданное уравнение принимает вид:

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3. \quad (10)$$

Так как далее  $\log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 = 2 \log_{\frac{1}{4}} |x+2|$ , то уравнение (10)

равносильно уравнению

$$3 \log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 3 = 3 \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}} (x+6),$$

которое преобразуется в уравнение

$$\log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)$$

и затем в уравнение

$$\log_{\frac{1}{4}} (4|x+2|) = \log_{\frac{1}{4}} ((4-x)(x+6)).$$

Из этого уравнения методом потенцирования получаем уравнение:

$$4|x+2| = (4-x)(x+6),$$

решение которого сводится к решению следующей совокупности:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 4(x+2) = (4-x)(x+6); \\ x+2 < 0, \\ -4(x+2) = (4-x)(x+6). \end{cases}$$

Из уравнения первой системы совокупности находим  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -8$ . Однако, неравенству этой системы удовлетворяет только значение  $x = 2$ .

Из уравнения второй системы находим  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{33}$ . Неравенству же этой системы удовлетворяет только значение  $x = 1 - \sqrt{33}$ .

Оба значения  $x = 2$  и  $x = 1 - \sqrt{33}$  удовлетворяют ОДЗ исходного уравнения, следовательно, являются его решением.

Ответ:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1 - \sqrt{33}$ .

### 5. Метод логарифмирования

Решение логарифмических уравнений методом логарифмирования.

Если неизвестное входит в уравнении как под знаком логарифма, так и в основании степени, то в некоторых случаях уравнения указанного типа могут решаться логарифмированием обеих частей уравнения с последующим использованием приведенных выше методов решения логарифмических уравнений.

Такие уравнения часто называют *показательно-логарифмическими уравнениями*.

Пример 14. Решить уравнение  $x^{2+\log_3 x} = 3^8$ .

Решение: ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3:

$$\log_3 x^{2+\log_3 x} = \log_3 3^8.$$

Используя свойства логарифмов, получаем уравнение

$$(2 + \log_3 x) \log_3 x = 8.$$

Обозначая  $\log_3 x = t$  и производя замену переменных, получаем квадратное уравнение  $t^2 + 2t - 8 = 0$ , корнями которого являются  $t_1 = -4$ ,  $t_2 = 2$ . Решаем простейшие логарифмические уравнения

$$\log_3 x = -4, \text{ откуда получаем } x = 3^{-4};$$

$$\log_3 x = 2, \text{ откуда получаем } x = 3^2.$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ, следовательно, являются решениями исходного уравнения.

Ответ:  $x_1 = \frac{1}{81}$ ,  $x_2 = 9$ .

### 6. Функционально-графический метод

Суть данного метода основана на использовании графиков функций или различных свойств функций при решении уравнений.

Некоторые логарифмические уравнения удается решить с помощью исследования поведения функций, входящих в левую и правую части уравнения.

Пример 15. Решить уравнение  $\log_7(x+2) = 6 - x$ .

Решение: Подстановкой проверяем, что  $x = 5$  является решением данного уравнения. Других решений уравнение не имеет, так как функция, стоящая в левой части, возрастает, а в правой — убывает, и, следовательно, графики этих функций не могут иметь более одного пересечения.

Ответ:  $x = 5$ .

При решении логарифмических уравнений функционально-графическим методом полезно использовать либо понятие области определения функции, либо понятие области значений, либо свойство монотонности (пример 15), либо свойств четности или нечетности функций.

Пример 16. Решить уравнение

$$3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) = 3|\cos((x-1)\cos 2x)|.$$

Решение:  $3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) \geq 3$  для любых  $x$ ,

$$0 \leq 3|\cos((x-1)\cos 2x)| \leq 3 \text{ для любых } x.$$

Равенство достигается, если 
$$\begin{cases} 3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) = 3, \\ 3|\cos((x-1)\cos 2x)| = 3. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) = 0, \quad x^2 - x + 1 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Проверим, какие из найденных значений  $x$  обращают второе уравнение системы в верное числовое равенство:

$$x_1 = 0 \Rightarrow |\cos(-1)| \neq 1;$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow |\cos 0| = 1.$$

Следовательно, решением системы, а, значит, и исходного уравнения является  $x = 1$ .

Ответ:  $x = 1$ .

#### Системы логарифмических уравнений

При решении систем логарифмических уравнений используются приемы решения систем алгебраических уравнений и методы решения логарифмических уравнений. Рассмотрим примеры.

Пример 17. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(xy) = 8, \\ \log_3\left(\log_{\frac{x}{9}}\frac{x}{y}\right) = 0. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ: 
$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ \log_{\frac{x}{9}}\frac{x}{y} > 0. \end{cases}$$

По определению логарифма имеем

$$\begin{cases} xy = (\sqrt{x})^8, \\ \log_{\frac{x}{9}}\frac{x}{y} = 3^0 = 1, \end{cases} \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} xy = x^4, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{9}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} y = x^3, \\ y = 9x. \end{cases}$$

Имеем  $x^3 = 9x$ , т.е.  $x^2 = 9$ ,  $x_{1,2} = \pm 3$ . Но ОДЗ удовлетворяет лишь  $x = 3$ . Тогда  $y = 27$ . Найденные значения  $x$  и  $y$  удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: (3; 27).

Пример 18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y), \\ 4^{\frac{x+y}{x}} = 32. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ: 
$$\begin{cases} x > y, \\ x + y > 0, \\ x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения данной системы получаем

$$\log_3(x-y) = \log_3 3 - \log_3(x+y), \quad \text{т.е.} \quad x-y = \frac{3}{x+y}, \quad \text{т.е.}$$

$$x^2 - y^2 = 3. \quad (11)$$

Второе уравнение исходной системы запишем так:

$$2^{2\left(\frac{x+y}{y-x}\right)} = 2^5, \quad \text{т.е.} \quad 2\left(\frac{x+y}{y-x}\right) = 5.$$

Обозначим  $\frac{y}{x} = t$ . Тогда  $2\left(t + \frac{1}{t}\right) = 5$ , т.е.  $2t^2 - 5t + 2 = 0$ ,

или  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Значит,

$$\frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x \quad \text{и} \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2y.$$

С учетом (11) получаем две системы и решаем их:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ y = 2x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а вторая система имеет два решения:  $(-2; -1)$ ,  $(2; 1)$ . Пара чисел  $(-2; -1)$  не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ:  $(2; 1)$ .

### Логарифмические неравенства

Простейшими логарифмическими неравенствами являются неравенства вида

$$\log_a x > b, \quad (12)$$

$$\log_a x < b, \quad (13)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые действительные числа ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

В зависимости от значений  $a$  множества решений неравенства (12) будут следующими:

$$\text{при } a > 1 \quad x \in (a^b; +\infty),$$

$$\text{при } a < 1 \quad x \in (0; a^b).$$

В зависимости от значений  $a$  множества решений неравенства (13) будут следующими:

$$\text{при } a > 1 \quad x \in (0; a^b),$$

$$\text{при } a < 1 \quad x \in (a^b; +\infty).$$

Множества решений нестрогих неравенств  $\log_a x \geq b$  и  $\log_a x \leq b$  находятся как объединение множества решений соответствующего строгого неравенства и уравнения  $\log_a x = b$ .

Неравенство вида

$$\log_a f(x) > b \quad (14)$$

при  $a > 1$  равносильно неравенству  $f(x) > a^b$ ;

при  $0 < a < 1$  равносильно системе неравенств  $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

Неравенство вида

$$\log_a f(x) < b \quad (15)$$

при  $a > 1$  равносильно системе неравенств  $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b; \end{cases}$

при  $0 < a < 1$  равносильно неравенству  $f(x) > a^b$ .

Более сложные логарифмические неравенства сводятся к неравенствам вида (12) – (15) методами, аналогичными используемым при решении логарифмических уравнений. Так, например, множество решений неравенства вида

$$P(\log_a x) > 0, \quad (16)$$

а также неравенств  $P < 0$ ,  $P \geq 0$ ,  $P \leq 0$ , где  $P$  – многочлен указанного аргумента, находится следующим образом. Вводится новое неизвестное  $t = \log_a x$ , и неравенство (16) решается как алгебраическое относительно неизвестного  $t$ . После этого решение исходного неравенства сводится к решению соответствующих простейших неравенств (12), (13) или систем этих неравенств.

Решение логарифмических неравенств вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad (17)$$

где  $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$  основано на следующих двух теоремах:

*Теорема 1.* Если  $a > 1$ , то неравенство (17) равносильно системе неравенств  $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

*Теорема 2.* Если  $0 < a < 1$ , то неравенство (17) равносильно системе неравенств  $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Пример 19. Решить неравенство  $\log_3(x-2) < 2$ .

*Решение:* Так как функция  $y = \log_3 x$  возрастающая (основание  $3 > 1$ ), то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} x-2 < 3^2, & \begin{cases} x-2 < 9, \\ x < 11, \end{cases} \\ x-2 > 0; & \begin{cases} x > 2, \\ x > 2. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $(2; 11)$ .

Пример 20. Решить неравенство  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq -1$ .

*Решение:* Так как основание логарифма  $\frac{1}{2} < 1$ , то данное

неравенство равносильно неравенству  $\frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \geq 2$ , решением которого является  $[2; 2,75) \cup [4; +\infty)$ .

*Ответ:*  $[2; 2,75) \cup [4; +\infty)$ .

Пример 21. Решить неравенство  $\log_2 \frac{4}{x+3} > \log_2(2-x)$ .

*Решение:* По теореме 1 заданное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{4}{x+3} > 2-x, \\ 2-x > 0, \end{cases}$$

откуда получаем  $\begin{cases} \frac{(x-1)(x+2)}{x+3} > 0, \\ x < 2, \end{cases}$  решением которого является

$(-3; -2) \cup (1; 2)$ .

*Ответ:*  $(-3; -2) \cup (1; 2)$ .

Пример 22. Решить неравенство

$$\log_2^2(x-1)^2 + 5 \log_{0,5}(x-1) > -1.$$

*Решение:* ОДЗ:  $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

Заметим, что  $\log_2(x-1)^2 = 2 \log_2|x-1|$ . При этом так как множеством значения данного неравенства является множество значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x > 1$ , заключаем, что  $|x-1| = x-1$ . Таким образом,  $\log_2(x-1)^2 = 2 \log_2(x-1)$ .

Далее,  $\log_{0,5}(x-1) = \log_{2^{-1}}(x-1) = -\log_2(x-1)$ .

Итак, исходное неравенство можно переписать так:

$$4 \log_2^2(x-1) - 5 \log_2(x-1) + 1 > 0.$$

Пологая  $\log_2(x-1) = t$ , получим неравенство

$$4t^2 - 5t + 1 > 0,$$

откуда  $\begin{cases} t < \frac{1}{4}, \\ t > 1. \end{cases}$  Следовательно,  $\begin{cases} \log_2(x-1) < \frac{1}{4}, \\ \log_2(x-1) > 1, \end{cases}$  или

$\begin{cases} 0 < x-1 < \sqrt[4]{2}, \\ x-1 > 2, \end{cases}$  откуда находим  $x \in (1; 1 + \sqrt[4]{2}) \cup (3; +\infty)$ .

*Ответ:*  $(1; 1 + \sqrt[4]{2}) \cup (3; +\infty)$ .

Логарифмическое неравенство вида  $\log_{g(x)} f(x) > c$  (18)

равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ 0 < f(x) < (g(x))^c; \\ g(x) > 1, \\ f(x) > (g(x))^c. \end{cases}$$

Неравенство вида  $\log_{g(x)} f(x) < c$  (19)

равносильно следующей совокупности:

$$\begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > (g(x))^c, \\ g(x) > 1, \\ 0 < f(x) < (g(x))^c. \end{cases}$$

Пример 23. Решить неравенство  $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$ .

*Решение:* Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x; \\ 2x > 1, \\ 0 < x^2 - 5x + 6 < 2x. \end{cases}$$

Множеством решений этой совокупности является

$$\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6).$$

*Ответ:*  $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$ .

Пример 24. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x). \quad (20)$$

*Решение:* Если основание логарифмов  $x-2 > 1$ , то к неравенству (20) применима теорема 1, если же  $0 < x-2 < 1$ , то к нему применима теорема 2.

Таким образом, решение неравенства (20) сводится к решению следующей совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ 2x-3 > 0, \\ 2x-3 < 24-6x; \\ x-2 > 1, \\ 24-6x > 0, \\ 2x-3 > 24-6x. \end{cases}$$

Из первой системы этой совокупности получаем  $\frac{27}{8} < x < 4$ , а

из второй  $2 < x < 3$ . Итак,  $(2; 3) \cup \left(\frac{27}{8}; 4\right)$  – решение исходного неравенства.

*Ответ:*  $(2; 3) \cup \left(\frac{27}{8}; 4\right)$ .

Пример 25. Решить неравенство  $x^{\lg x} > 10$ . (21)

*Решение:* Данное неравенство можно назвать *показательно-логарифмическим*. Выше (см. пример 14) мы отмечали, что при решении показательного-логарифмического уравнений целесообразно взять логарифмы от обеих частей уравнения по одному и тому же основанию. Этот же прием можно применить и при решении показательного-логарифмических неравенств.

Естественно, при взятии логарифмов от обеих частей неравенства (как и уравнения) предварительно следует убедиться, что эти логарифмы существуют.

Знак полученного логарифмического неравенства останется таким же, каким он был до логарифмирования, если логарифмирование выполнялось по основанию  $a > 1$ ; если же логарифмирование выполнялось по основанию  $0 < a < 1$ , то знак неравенства изменится на противоположный.

Вернемся к неравенству (21). Обе его части принимают только положительные значения, и поэтому логарифмы этих частей существуют. Возьмем логарифмы по основанию 10. Так как  $10 > 1$ , то получим неравенство  $\lg x^{\lg x} > 1$  (того же знака, что и неравенство (21)), равносильное неравенству (21).

После преобразований получим неравенство  $\lg x \cdot \lg x > 1$ , т.е.

$$\lg^2 x - 1 > 0, \text{ откуда } \begin{cases} \lg x < -1, \\ \lg x > 1. \end{cases} \text{ Решением этой совокупности,}$$

следовательно решением и исходного неравенства является  $(0; 0,1) \cup (10; +\infty)$ .

*Ответ:*  $(0; 0,1) \cup (10; +\infty)$ .

### Упражнения

1. Решить уравнения:

- 1)  $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$ ;
- 2)  $\log_5(2 + \log_3(3 + x)) = 0$ ;
- 3)  $\log_4(2 \log_3(1 + \log_2(1 + 3 \log_2 x))) = \frac{1}{2}$ ;
- 4)  $\log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$ ;
- 5)  $\frac{1}{2} \lg(x^2 - 10x + 25) + \lg(x^2 - 6x + 3) = 2 \lg(x - 5) + \frac{1}{2} \lg 25$ ;
- 6)  $\lg(x^3 + 8) - 0,5 \lg(x^2 + 4x + 4) = \lg 7$ ;
- 7)  $\log_{5x-2} 2 + 2 \log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x + 1)$ ;
- 8)  $4 \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ ;
- 9)  $2 \log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3 \log_{9x} 3 = 0$ ;
- 10)  $2 \cdot \sqrt[3]{2 \log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} = 0$ ;
- 11)  $\frac{1}{5 - 4 \lg(x + 1)} + \frac{5}{1 + 4 \lg(x + 1)} = 2$ ;
- 12)  $4^{\log_5 x^2} - 4^{\log_5 x + 1} + 4^{\log_5 x - 1} - 1 = 0$ ;
- 13)  $x^{\frac{3}{\log_3 x^2}} = (\sqrt{x})^{-\log_3 x + \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}}}$ ;
- 14)  $(x + 1) \log_3^2 x + 4x \log_3 x - 16 = 0$ ;
- 15)  $\log_2(2 - x) = x^2 + 2x$ .

2. Решить неравенства:

- 1)  $\log_{\frac{1}{2}}(5 + 4x - x^2) > -3$ ;
- 2)  $\log_2(x + 1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2 + 2x + 1} > 6$ ;

- 3)  $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x - 1}{x + 1} < \cos \frac{2\pi}{3}$ ;
- 4)  $\log_3 \frac{3}{x - 1} > \log_3(5 - x)$ ;
- 5)  $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$ ;
- 6)  $\log_2(x - 1) - \log_2(x + 1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$ ;
- 7)  $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x \geq 11$ ;
- 8)  $\log_1(16 - 6x - x^2) \leq 1$ ;
- 9)  $\log_{x+4}(5x + 20) \leq \log_{x+4}(x + 4)^2$ ;
- 10)  $\log_x \log_2(4^x - 12) > 0$ ;
- 11)  $\log_{x^3} \frac{3x - 2}{|x - 2|} \geq \frac{1}{3}$ ;
- 12)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2 - 5x + 8)} \leq 2,5$ ;
- 13)  $x^3 > 2^{15 \log_2 \sqrt{2} \sqrt{3}} \cdot 3^{\log_{\sqrt{x}} 3}$ ;
- 14)  $x^{\lg(x^2 - 6x + 5)} > 1$ .

3. Решить системы:

- 1)  $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{2,5}, \\ \log_3 y \cdot \log_y(y - 2x) = 1; \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} \log_y x - 2 \log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} 4^{x^2 - x - 6} = 11^{2x - 6}, \\ \frac{\log_{0,3} \sqrt{x + 1}}{\log_{0,3}(x - 1)} \leq 1; \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} \left| \log_{\frac{1}{2}} \frac{x - 1}{x + 2} \right| < 1, \\ \log_3(x - 2) < 2. \end{cases}$

Домашнее задание

Решить логарифмические уравнения, неравенства и их системы:

Вариант I

$$\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20);$$

$$\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2; \quad x^{2\lg^3 x - 1,5\lg x} = \sqrt{10};$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(2-x) > \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{x+1}; \quad \log_{x+\frac{5}{2}} \left( \frac{x-5}{2x-3} \right)^2 < 0;$$

$$\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81 \cdot \sqrt[3]{3}, \\ xy = 9 \cdot \sqrt[3]{9}. \end{cases}$$

Вариант II

$$\log_3(x^2 + 4x + 12) = 2; \quad 3\sqrt{\lg x} + 2\lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2; \quad x^{2\lg^2 x} = 10x^3;$$

$$\log_{0,1}(x^2 + 75) - \log_{0,1}(x-4) \leq -2; \quad \log_{x^3} \frac{3x-2}{|x-2|} \geq \frac{1}{3};$$

$$\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}} \left( \log_{\frac{1}{2}} y \right) = 1, \\ x^2 y^4 = 16. \end{cases}$$

Вариант III

$$\log_2(9-2^x) = 10^{\lg(3-x)}; \quad 7^{\log_2^2 x} + x^{\log_7 x} = 14;$$

$$x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}};$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x+1) < \log_{\frac{1}{5}}(16-x^2) + 1;$$

$$\log_{x^2+2x-2} \frac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0;$$

$$\begin{cases} \log_2(xy) + 2\log_2(x-y) = \frac{15}{2} - \log_4 32, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

Вариант IV

$$(3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}) \cdot \lg(7-x) = 0;$$

$$2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2(2\sqrt{2}x) = 1;$$

$$15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5(9x)+1} = 1; \quad \log_{\pi}(x+27) - \log_{\pi}(16-2x) < \log_{\pi} x;$$

$$\log_{5x-x^2-4} \frac{2x+3-x^2}{2} > 1; \quad \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = 13, \\ \log_6 x + 2\log_6 y = 3. \end{cases}$$

Вариант V

$$\log_3 \left( 3^{x^2-13x+28} + \frac{2}{9} \right) = \log_5 0,2; \quad \frac{\lg(6-x)}{2} = \frac{1}{3\lg(6-x)-1};$$

$$9x^{\lg x} + 9x^{-\lg x} = 60; \quad \frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3} 100 - \log_{0,3} 9} < 1;$$

$$\log_{10-x} \left( \frac{19}{2} - x \right)^2 > 2\log_{x-9}(x-9); \quad \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3}, \\ 2\log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$$

Вариант VI

$$\log_3((x-1)(2x-1)) = 0; \quad \frac{1 - \lg^2 x^2}{\lg x - 2\lg^2 x} = \lg x^4 + 5;$$

$$x^{\log_2^2 x^2 - \log_2(2x)-2} + (x+2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3;$$

$$2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3};$$

$$\log_{\log_2(0,5x)}(x^2 - 10x + 22) > 0; \begin{cases} y^{x^2-3x-4} = 1, \\ \log_2 x = y. \end{cases}$$

Вариант VII

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2 - 4x + 3}{4} = -2; \frac{1 + \lg(x-1)}{1 - \lg^2(x-1)} + \frac{1}{1 - \lg(x-1)} = 1;$$

$$3^{\sqrt{\log_9(4x) - \frac{3}{4}}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}}; \frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3(5x) > \log_{\frac{1}{3}}(x+3);$$

$$\log_x(2x^3) \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}; \begin{cases} (x-y)^{\lg(x+1,5)} = 0,2, \\ 0,1^{\lg(x-y)} = 2x+3. \end{cases}$$

Вариант VIII

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0; \frac{1}{5-4\lg x} + \frac{4}{1+\lg x} = 3;$$

$$x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} - \frac{1}{x} = 0; \log_{0,2}^2(x-1) > 4;$$

$$\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1; \begin{cases} (x^2 - y^2)^{\log_2(x-y)} = 8, \\ (x+y)^{\log_2(x^2-y^2)} = 64. \end{cases}$$

Вариант IX

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x-3} = 0; \sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0;$$

$$|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3; \log_{\sqrt{2}} \frac{7-3x}{x+2} - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+2) > \log_{\frac{1}{2}} 4;$$

$$\log_{x-2} \frac{5x-1}{3x+2} \geq 0; \begin{cases} 9^{\frac{5-\log_2(x-y)}{2}} = 81, \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 3. \end{cases}$$

Вариант X

$$\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1; \log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1;$$

$$(\sqrt{x})^{\log_2(x^2-1)} = 5; \log_2((x-3)(x+2)) + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < -\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 3;$$

$$\log_{x^2-6x+8}(x-4) > 0; \begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 2,5, \\ \sqrt{x+y} + 2\sqrt{x^2-y^2} = 4+2y. \end{cases}$$

Вариант XI

$$\lg \sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \lg(2x+15) = 1; \log_2^2(2^x-1) + \log_2(2^x-1) - 2 = 0;$$

$$x^{1+\log_3 x} = 9x^2; 2,25^{\log_2(x^2-3x-10)} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_1(x^2+4x+4)};$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0; \begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5, \\ \lg x - \lg y = 1. \end{cases}$$

Вариант XII

$$2 \log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0;$$

$$4 \log_{6-x}(12+4x-x^2) - 8 \log_{6-x}(x+2) = \log_{x+2}(6-x);$$

$$x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_1(x^2-3x+1)} < 1; \log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1;$$

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ \log_{12}(x^2 + y^2) = 1. \end{cases}$$

Вариант XIII

$$\lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30; \sqrt{5 \log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2};$$

$$x^{\log_{\sqrt{x}}(2x)} = 4; \log_{\frac{1}{2}}|x-3| > -1; \log_x \sqrt{21-4x} > 1;$$

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + 2\lg 2, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = \lg 2. \end{cases}$$

Вариант XIV

$$0,1 \lg^3 \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 0,5 \lg x - \lg \frac{1}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2;$$

$$\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10; \quad \log_2(\sqrt{x+3} - x - 1) \leq 0;$$

$$\log_{|x+6|} 2 \cdot \log_2(x^2 - x - 2) \geq 1; \quad \begin{cases} xy^2 = 32, \\ 2 \left( \log_{\frac{1}{y}} x - 2 \log_{x^2} y \right) = -5. \end{cases}$$

Вариант XV

$$\log_2(2x^2 - 2) = \log_2(5x - 4);$$

$$\log_x(4x - 3) = 2 + \sqrt{\log_x^2(4x - 3) - 4 \log_x \left( 4 - \frac{3}{x} \right)};$$

$$2x^{\lg x} + 3^{-\lg x} = 5; \quad 2 \log_4 x - \frac{1}{2} \log_2(x^2 - 3x + 2) \leq \cos \frac{4\pi}{3};$$

$$\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x); \quad \begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}, \\ \lg(y-4x) = 2 \lg(2+2x-y) - \lg y. \end{cases}$$

Вариант XVI

$$\frac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5 - x)} = 3; \quad \log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6;$$

$$5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}; \quad \frac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \leq \frac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x};$$

$$\log_{|x-4|}(2x^2 - 9x + 4) > 1; \quad \begin{cases} \log_3 y - \log_3 x = 1, \\ x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27. \end{cases}$$

Вариант XVII

$$\log_{x+1}(x-0,5) = \log_{x-0,5}(x+1); \quad \sqrt{2 \log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0;$$

$$x^{\lg x} = 1000x^2; \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 8 \log_2^2 x}}{2 \log_2 x} < 1; \quad \log_x \frac{x+3}{x-1} > 1;$$

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

Вариант XVIII

$$\log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x - 1) = 3; \quad 2 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 4;$$

$$(1,25)^{1 - \log_2^2 x} = (0,64)^{2 \log_2(2x)};$$

$$\sqrt{\log_4 \frac{2x^2 - 3x + 3}{2}} + 1 > \log_2 \frac{2x^2 - 3x + 3}{2};$$

$$\log_4(x-1) \geq 2; \quad \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Вариант XIX

$$\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18; \quad \log_{\frac{1}{2}} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8;$$

$$(0,4)^{\lg^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \lg x^3}; \quad \frac{\log_{0,5} \sqrt{x+4}}{\log_{0,5}(x+2)} \leq 1;$$

$$\log_{9x^2}(6 + 2x - x^2) \leq \frac{1}{2}; \quad \begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$$

Вариант XX

$$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4; \quad \frac{3}{4} \log_{\sqrt[3]{3}} x - 30 \sqrt{\log_3 x + 36} = 0;$$

$$x^{\lg \sqrt[4]{x}} = 10; \quad \frac{\sqrt{\log_{0,5}^2 x - 81 + 2}}{\log_{0,5} x - 1} < 1; \quad \log_{\frac{x+6}{3}} \left( \log_2 \frac{x-1}{2+x} \right) > 0;$$

$$\begin{cases} 4^{-y} \cdot \log_2 x = 4, \\ \log_2 x + 2^{-2y} = 4. \end{cases}$$

Вариант XXI

$$\log_{x-1} \sqrt[4]{2x^2 - 8x + 9} = \frac{1}{2}; \quad 5^{\log_2^2 x} + x^{\log_5 x} = 10; \quad x^{\log_2 x + 3} = 16;$$

$$\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2 \log_9 7; \quad \log_{|x+6|} 2 \cdot \log_2(x^2 - x - 2) \geq 1;$$

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2, \\ \log_2(xy) = 2. \end{cases}$$

Вариант XXII

$$\lg x^2 + \lg(x+10)^2 = 2 \lg 11; \quad 4 \log_4^2(-x) + 2 \log_4 x^2 = -1;$$

$$x^{\log_3^2 x} = 9;$$

$$2 \log_{\frac{1}{4}}(x+5) > \frac{9}{4} \log_{\frac{1}{3\sqrt{3}}} 9 + \log_{\sqrt{x+5}} 2; \quad \log_x \left( x^2 - \frac{3}{16} \right) > 4;$$

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 2 \left( 2 \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y \right) = 5. \end{cases}$$

Вариант XXIII

$$\frac{5}{2} \log_2(x+3)^2 - 5 = \log_2(3-x)^5 + \log_2(x+5)^5;$$

$$\frac{1 - \lg^2 x^2}{\lg x - 2 \lg^2 x} = \lg x^4 + 5;$$

$$x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}; \quad \log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{3^x - 1}{16} \leq \frac{3}{4};$$

$$\log_{\frac{1}{x}} \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} \geq 1; \quad \begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y} = 0,5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases}$$

Вариант XXIV

$$\log_{x+1} \left( x - \frac{1}{2} \right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1); \quad 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6;$$

$$x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x}; \quad \log_2(3-x) - \log_2 \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{5-x} > \frac{1}{2} + \log_2(x+7);$$

$$\log_{2x-x^2} \left( x - \frac{3}{2} \right)^4 > 0; \quad \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Вариант XXV

$$\frac{\lg 2 + \lg(4 - 5x - 6x^2)}{\lg^3 \sqrt{2x-1}} = 3; \quad \log_x(5\sqrt{5}) - \frac{5}{4} = \log_x^2 \sqrt{5};$$

$$26^{\log_5(x-3)} = 3^{x \log_5(x-3)}; \quad \log_3 x - \log_3^2 x \leq \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 4;$$

$$\log_{x+\frac{1}{x}} \left( x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \right) \geq 1; \quad \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

## V. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

*Определение.* Решить уравнение (неравенство) с параметрами — это значит, для каждого допустимого значения параметра найти множество всех решений данного уравнения (неравенства).

Различают два вида задач с параметром:

1. Решить уравнение (неравенство) для всех значений параметра.
2. Найти значения параметра, при которых решения уравнения (неравенства) удовлетворяют заданным условиям.

### Задачи первого типа

Задачи первого типа могут быть на решение уравнений (неравенств) каждого из рассмотренных в данном учебно-методическом пособии видов: линейные, дробно-рациональные, квадратные, иррациональные, показательные, логарифмические и т.п.

#### 1. Линейные уравнения и неравенства

*Пример 1.* Для всех значений параметра  $a$ , решить уравнение:

$$(a^2 - 9) \cdot x = a^2 - a - 12.$$

*Решение.* Разложим на множители левую и правую части уравнения:  $(a-3)(a+3) \cdot x = (a+3)(a-4)$ . Замечаем, что от того, какие значения принимает параметр  $a$  в левой части уравнения зависит результат.

$$\text{Если } a \neq \pm 3, \text{ то } x = \frac{(a+3)(a-4)}{(a+3)(a-3)} = \frac{a-4}{a-3}.$$

Если  $a = 3$ , то уравнение примет вид:  $0 \cdot x = -6$ . Решений нет.

Если  $a = -3$ , то  $0 \cdot x = 0$  т.е.  $x \in R$ .

*Ответ:* при  $a \neq \pm 3$   $x = \frac{a-4}{a-3}$ , при  $a = 3$   $x \in \emptyset$ , при  $a = -3$   $x \in R$ .

Обращаем ваше внимание на специальную запись ответа, в которой перебираются все возможные значения, принимаемые параметром  $a$ .

При решении линейных неравенств приходится учитывать знаки выражений, содержащих параметры.

*Пример 2.* Для всех значений параметра  $a$  решить неравенство  $(a-1) \cdot x < 2$ .

*Решение.* Если  $a = 1$ , то неравенство примет вид  $0 \cdot x < 2$ , что верно при  $x \in R$ . Если  $a > 1$  т.е.  $a-1 > 0$ , то обе части неравенства

делим на одно и то же положительное число:  $x < \frac{2}{a-1}$ ; если  $a < 1$ , то

обе части неравенства делим на одно и то же отрицательное число  $a-1 < 0$ , поэтому знак неравенства изменится на противоположный:

$$x > \frac{2}{a-1}.$$

*Ответ:* при  $a = 1$   $x \in R$ ,

$$\text{при } a > 1 \quad x < \frac{2}{a-1},$$

$$\text{при } a < 1 \quad x > \frac{2}{a-1}.$$

Мы рассмотрели простейшие линейные уравнения и неравенства, которые решаются довольно легко. Остальные виды уравнений и неравенств требуют выполнения дополнительных выкладок.

#### 2. Дробно-рациональные уравнения и неравенства

*Решение дробно-рациональных уравнений и неравенств требует дополнительной проверки ОДЗ.*

*Пример 3.* При всех значениях параметра  $k$  решить уравнение:

$$\frac{x-4}{x+1} + \frac{2}{k} = \frac{1}{k(x+1)}.$$

*Решение.* Найдем ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq -1 \\ k \neq 0 \end{cases}$ . Обе части уравнения умножим

на отличное от нуля число  $(x+1) \cdot k$ :  $(x-4) \cdot k + 2(x+1) - 1 = 0$ ,  $x(k+2) = 4k-1$ ,

Если  $k = -2$ , то  $x \cdot 0 = -9$ , т.е.  $x \in \emptyset$ . Если  $k \neq -2$ , то  $x = \frac{4k-1}{k+2}$ .

Исключим те значение параметра  $k$ , при которых найденное решение равно  $-1$ :

$$\frac{4k-1}{k+2} = -1 \Leftrightarrow 4k-1 = -k-2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}. \text{ При } k = -\frac{1}{5} \quad x = -1$$

*Ответ:* при  $k \neq 0$ ,  $k \neq -2$ ,  $k \neq -\frac{1}{5}$   $x = \frac{4k-1}{k+2}$ , при  $k = 0$ ,

$k = -2$ ,  $k = -\frac{1}{5}$   $x \in \emptyset$ .

**Пример 4.** Решить относительно  $x$  неравенство

$$\frac{x}{x-2} < \frac{2b+1}{(b-3)(x-2)}.$$

**Решение:** ОДЗ =  $\{x \neq 2, b \neq 3\}$ . Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{x(b-3) - (2b+1)}{(x-2)(b-3)} < 0.$$

Числитель и знаменатель дроби делим на одно и то же отличное от нуля число  $(b-3)$ :

$$\frac{x - \frac{2b+1}{b-3}}{x-2} < 0.$$

Чтобы решить неравенство

методом интервалов, нам надо сравнить числа  $\frac{2b+1}{b-3}$  и 2:

а)  $\frac{2b+1}{b-3} = 2 \Leftrightarrow$  имеем  $\frac{x-2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

б)  $\frac{2b+1}{b-3} < 2 \Leftrightarrow b < 3$ , откуда  $x \in (\frac{2b+1}{b-3}; 2)$

в)  $\frac{2b+1}{b-3} > 2 \Leftrightarrow b > 3$ , откуда  $x \in (2; \frac{2b+1}{b-3})$ .

**Ответ:** при  $b < 3$   $x \in (\frac{2b+1}{b-3}; 2)$ ;

при  $b = 3$  неравенство не имеет решений;

при  $b > 3$   $x \in (2; \frac{2b+1}{b-3})$ .

### 3. Квадратные уравнения и неравенства

При решении квадратных уравнений и неравенств приходится проверять условия, накладываемые дискриминантом.

**Пример 5.** Решить относительно  $x$ :

$$4(k-1)^2 x + 4(k-1) + \frac{3k+4}{x} = 0.$$

**Решение.** ОДЗ:  $x \neq 0$ . Преобразуем уравнение к виду  $4(k-1)^2 x^2 + 4(k-1)x + (3k+4) = 0$ . Уравнение имеет смысл при  $\forall k \in R$ . Поэтому рассмотрим следующие случаи:

1. При  $k=1$  уравнение принимает вид  $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 7 = 0$  и не имеет решений.

2. При  $k \neq 1$  оно является квадратным. Найдем дискриминант уравнения:  $D_1 = [2(k-1)]^2 - 4(k-1)^2(3k+4) = -12(k-1)^2(k+1)$ . В зависимости от его знака будем иметь: а) если  $D_1 > 0$ , т.е.  $k < -1$ , то

уравнение имеет два решения:  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3k-3}}{2(k-1)}$ . Исключим те значения параметра, при которых

$$x = 0: \frac{-1 + \sqrt{-3k-3}}{2(k-1)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-3k-3} = 1 \Leftrightarrow -3k = 4 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}.$$

б) если  $D_1 < 0$ , т.е.  $k > -1$ , то уравнение не имеет решений.

в) если  $D_1 = 0$ , т.е.  $k = -1$ , то уравнение имеет одно решение  $x = \frac{1}{4}$ .

**Ответ:** при  $k = -\frac{4}{3}, k > -1$   $x \in \emptyset$ ,

при  $k \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (-\frac{4}{3}; -1)$   $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3k-3}}{2(k-1)}$ ,

при  $k = -1$   $x = \frac{1}{4}$ .

При решении квадратных неравенств приходится дополнительно решать вопрос о чередовании корней квадратного трехчлена.

**Пример 6.** Решить относительно  $x$  неравенство  $ax^2 + (a+1)x + 1 > 0$ .

**Решение.** Обозначим  $f(x) = ax^2 + (a+1)x + 1$ .

При  $a = 0$  неравенство вырождается в линейное:  
 $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ .

Рассмотрим случай  $a \neq 0$ . Найдем дискриминант квадратного трехчлена:  $D = (a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2 \geq 0$ .

Находим корни квадратного трехчлена:  $x_1 = \frac{-(a+1) - (a-1)}{2a} = -1$

и  $x_2 = \frac{-(a+1) + (a-1)}{2a} = -\frac{1}{a}$ .

Сравним их: а)  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{a}$ , если  $\frac{a-1}{a} > 0$ , т.е. при  $\begin{cases} a > 1 \\ a < 0 \end{cases}$ .

а<sub>1</sub>) При  $a > 1$  ветви параболы  $f(x)$  смотрят вверх, следовательно  $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{a}; +\infty)$ .

а<sub>2</sub>) При  $a < 0$  ветви параболы смотрят вниз, имеем:  $x \in (-1; -\frac{1}{a})$ .

б)  $x_1 > x_2 \Leftrightarrow -1 > -\frac{1}{a}$ , если  $\frac{a-1}{a} < 0$ , т.е. при  $0 < a < 1$ . Ветви параболы  $f(x)$  смотрят вверх, имеем  $x \in (-\infty; -\frac{1}{a}) \cup (-1; +\infty)$ .

в)  $x_1 = x_2 \Leftrightarrow -1 = -\frac{1}{a}$ , если  $a = 1$ . Ветви параболы  $f(x)$  смотрят вверх, она касается оси абсцисс в точке  $x = -1$ , имеем  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .

Ответ: при  $a = 0$   $x > -1$ ;

при  $a = 1$   $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ ;

при  $a > 1$   $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{a}; +\infty)$ ;

при  $a < 0$   $x \in (-1; -\frac{1}{a})$ ;

при  $a \in (0; 1)$   $x \in (-\infty; -\frac{1}{a}) \cup (-1; +\infty)$ .

### Задачи второго типа

Пример 7. Найти все значения параметра, при которых уравнение не имеет корней  $\sqrt{2x^2 + (2a+1)x + 4a+12} = x-1$ .

Решение. Для решения иррационального уравнения обе его части надо возвести в квадрат, после чего получаем квадратное уравнение. Далее может быть 2 случая решения задачи:

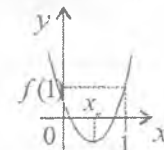
1. Квадратное уравнение не имеет решения, т.е.  $D < 0$ .

2. Квадратное уравнение имеет решение, но исходное иррациональное уравнение не имеет решения, т.е. выполняется условие  $x - 1 < 0$ .

Рассмотрим эти случаи:

1. После возведения обеих частей в квадрат и преобразований имеем уравнение  $x^2 + x(2a+3) + 4a+11 = 0$ . Его дискриминант  $D = 4a^2 - 4a - 35 = 4(a-3,5)(a+2,5) < 0$  при  $a \in (-2,5; 3,5)$ , где квадратное уравнение не имеет решений.

2. Квадратное уравнение имеет решение



при  $a \in (-\infty; -2,5] \cup [3,5; +\infty)$ . На рисунке изображено условие того, что корни нашего уравнения расположены не правее точки  $x = 1$  (здесь  $f(x) = x^2 + x(2a+3) + 4a+11$ ). Теперь запишем эти условия аналитически:  $D \geq 0$ ; вершина находится не правее  $x = 1$ ,

т.е.  $x_0 = \frac{-b}{2a} \leq 1$ ;  $f(1) \geq 0$ . В итоге имеем:

$$\begin{cases} a \geq 3,5 \\ a \leq -2,5 \\ x_0 = -\frac{2a+3}{2} \leq 1 \\ f(1) = 1+2a+3+4a+11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3,5 \\ a \leq -2,5 \\ -2a \leq 5 \Leftrightarrow a \geq 3,5 \\ 6a \geq -15 \end{cases}$$

Объединяя полученные в обоих случаях решения, получим  $a \in (-2,5; +\infty)$ .

Ответ: при  $a \in (-2,5; +\infty)$ .

Упражнения

Решить уравнения и неравенства:

- 1)  $\frac{a+2}{a-2}x = \frac{a^2-4}{a+3}$ .    2)  $a^2x + 4ax - a - 4 \leq 0$ .    3)  $ax^2 - 2x + a - 1 = 0$ .
- 4)  $3(a+1)x^2 - 6(a^2+a+1)x + 7(a^3-1) < 0$ .
- 5) При каких значениях  $a$  неравенство  $x^2 - (a+2)x + 8a + 1 > 0$  выполняется для всех  $x \in R$ ?
- 6) При каких значениях параметра неравенство  $(4-a^2)x^2 + (a+2)x - 1 > 0$  не имеет решений?

Домашнее задание

1. Решить уравнения и неравенства для всех значений параметра.

2. У каждого варианта свое.

Вариант I.

1. а)  $4a - a^2x = 2ax$ ; б)  $ax^2 - (a+2)x + 2 \leq 0$ .
2. При каких значениях параметра неравенство  $\frac{1}{24}x^2 + xa + 1 - a > 0$  выполняется при  $x \in R$ ?

Вариант II.

1. а)  $(a^2-9)x = 9a^2 - 10a - 51$ ; б)  $ax^2 - 4x + 3 \geq 0$ .
2. При каких значениях параметра неравенство  $(4-b^2)x^2 + 2(b+2)x - 1 > 0$  не имеет решений?

Вариант III.

1. а)  $ax^2 - x + 3 < 0$ ; б)  $(a^2 - 5a + 6)x = a^4 - 16$ .
2. При каких значениях параметра неравенство  $x^2 - (a+2)x + 8a + 1 > 0$  выполняется для всех действительных  $x$ ?

Вариант IV.

1. а)  $(a^2 - 5a - 14)x = 2a^2 - 13a - 7$ ; б)  $ax^2 + x + 1 > 0$ .
2. При каких значениях параметра уравнение  $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$  имеет отрицательные корни?

Вариант V.

1. а)  $\frac{ax-5-x}{x^2-4} = 0$ ; б)  $ax^2 - 8ax + 5 > 0$ .

2. При каких значениях параметра уравнение  $\frac{x-k}{k+3} = \frac{k-4}{x-k}$  не имеет действительных корней?

Вариант VI.

1. а)  $\frac{x^2-9}{x-a} = 0$ ; б)  $ax^2 - 4ax - 3 \leq 0$ .

2. При каких значениях параметра неравенство  $(m-2)x^2 - mx - 1 < 0$  верно для  $x \in R$ ?

Вариант VII.

1. а)  $(a^2 - a)x = a + 3$ ; б)  $ax^2 - 2(a-1)x + a + 2 < 0$ .

2. При каких значениях параметра оба корня уравнения  $x^2 - (2a+1)x + 4 - a = 0$  заключены между числами 1 и 3?

Вариант VIII.

1. а)  $xa^2 < a + x$ ; б)  $\frac{x}{2m} + \frac{2}{x-2} = \frac{3x-2m}{2(x-2)}$ .

2. При каких значениях параметра неравенство  $px^2 - 4x + 3p + 1 > 0$  справедливо при всех  $x > 0$ ?

Вариант IX.

1. а)  $2a(a-2)x = a - 2$ ; б)  $\frac{x^2}{m} - 2x - \frac{x}{m} + m + 1 > 0$ .

2. При каких значениях параметра нули функции  $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 2a - 5$  расположены между числами 2 и 4?

Вариант X.

1. а)  $a^2x - ax > a - 1$ ; б)  $\frac{(m-2)x}{m-1} - 1 = \frac{m+2}{m-1} - \frac{2x^2+m+1}{(m-1)x}$ .

2. При каких значениях параметра неравенство  $ax^2 - 4ax - 3 \leq 0$  выполняется для всех  $x \in R$ ?

Вариант XI.

1. а)  $2a(a-2)x < a - 2$ ; б)  $ax^2 - 2x + 4 = 0$ .

2. При каких значениях параметра неравенство  $bx^2 + (2b+3)x + b - 1 \geq 0$  не имеет решений?

Вариант XII.

1. а)  $3(2a-x) < ax+1$ ; б)  $(a-1)x^2 - x + a = 0$ .  
 2. При каких значениях параметра неравенство  $mx^2 - 2(m+3)x + m < 0$  верно при  $x \in [-2; 1]$ ?

Вариант XIII.

1. а)  $\frac{ax+3}{x-1} = \frac{x+4}{ax+8}$ ; б)  $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 > 0$ .  
 2. При каких значениях параметра уравнение  $(2a-1)x^2 + 2x - 1 = 0$  имеет два действительных и различных корня?

Вариант XIV.

1. а)  $\frac{x^2 - (3m+1)x + 2m^2 + 4m}{x-2} = 0$ ; б)  $x^2 + 2x + 1 > \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}$ .  
 2. При каких значениях параметра уравнение  $(3a-5)x^2 - (6a-2)x + 3a - 2 = 0$  имеет один корень?

Вариант XV.

1. а)  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x-m} = 0$ ; б)  $(3k-1)x^2 - 2(2k-1)x + 2k - 1 > 0$ .  
 2. При каких значениях параметра число 3 заключено между корнями уравнения  $x^2 + (2a+1)x + 4 - a = 0$ ?

Вариант XVI.

1. а)  $\frac{x^2 - (2m-1)x + m^2 - m}{x+4} = 0$ ;  
 б)  $3(a+1)x^2 - 6(a^2+a+1)x + 7(a^3-1) < 0$ .  
 2. При каких значениях параметра уравнение  $(1-a)x^2 + 4x - 3 = 0$  не имеет действительных корней?

Вариант XVII.

1. а)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-a} = \frac{a+1}{a}$ ; б)  $\frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$ .  
 2. При каких значениях параметра уравнение  $ax^2 - (2a-1)x + a + 2 = 0$  имеет один корень?

Вариант XVIII.

1. а)  $\frac{x}{2a} + \frac{a-x-1}{x+2} = \frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{ax+1}{3} + \frac{4a-x}{2} < \frac{a^2}{6}$ .  
 2. При каких значениях параметра число -2 заключено между корнями уравнения  $-x^2 + (3k-1)x + k - 1 = 0$ ?

Вариант XIX.

1. а)  $(a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0$ ; б)  $\frac{2x-1}{m+1} - \frac{x+1}{2(m-1)} > \frac{2x-3}{m-1}$ .  
 2. Найти значения параметра, для которых уравнение  $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$  имеет два различных положительных корня.

Вариант XX.

1. а)  $(k-5)x^2 + 3kx - (k-5) = 0$ ; б)  $\frac{ax-3}{x-3} - \frac{a}{2} < a-1$ .  
 2. При каких значениях параметра нули функции  $y(x) = x^2 - 4(a-3)x - 20a + 35$  заключены между числами -4 и 3?

Вариант XXI.

1. а)  $4(k-1)^2x + 4(k-1) + \frac{3k+4}{x} = 0$ ; б)  $\frac{x}{x-2} < \frac{2b+1}{(b-3)(x-2)}$ .  
 2. Найти все значения  $x$ , которые удовлетворяют неравенству  $(2a-1)x^2 > (5a-4)x + 3a - 1$  при любых значениях  $a < 1$ .

Вариант XXII.

1. а)  $\frac{x-a}{x-2} + \frac{10}{x+2} + \frac{44}{x^2-4} = 0$ ; б)  $\frac{(a+2)x-2}{a-1} < 2x-1$ .

2. Найти значения параметра, при каждом из которых один корень уравнения  $x^2 + 2(k-1)x + 3k + 1 = 0$  удовлетворяет неравенству  $x < -1$ .

Вариант XXIII.

1. а)  $\frac{1}{k} - \frac{2}{x-k} + \frac{2k+1}{x(x-k)} = \frac{1}{kx(x-k)}$ ; б)  $3(2a-x) < ax+1$ .

2. При каких значениях параметра оба корня уравнения  $x^2 - (2a+1)x + 4 - a = 0$  заключены между числами 1 и 3?

Вариант XXIV.

1. а)  $\frac{x}{2a+x} - \frac{2a+x}{x-2a} = \frac{16a^2}{4a^2-x^2}$ ; б)  $\frac{x^2}{m} - 2x - \frac{x}{m} + m + 1 > 0$ .

2. Найти все значения  $a$ , при которых уравнение  $ax^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$  имеет один корень.

Вариант XXV.

1. а)  $\frac{x-3m}{x^2-9} - \frac{2m+3}{x+3} = \frac{m-5}{x-3}$ ; б)  $x^2 - 8ax < -15a^2$

2. При каких значениях параметра уравнение  $ax^2 - (2a-1)x + a + 2 = 0$  имеет два действительных и различных корня?

Литература

1. Барабанов А. И. Конкурсные задачи. - Издательство Саратовского университета, 1969.
2. Бородуля И.Г. Показательная и логарифмическая функции (задачи и упражнения). - М.: Просвещение, 1984.
3. Гараев К.Г., Исхаков Э.М. Пособие по математике для поступающих в высшие учебные заведения.
4. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - М.: Илекса, 2002.
5. Гуськова А.Н., Зиновьева Н.И. Варианты экзаменационных задач по математике с решениями. - Казань, 1996.
6. Дорякин Д.П., Плансенко З.Е., Бажора Г.Ф. Сборник задач и упражнений по математике. - М.: Высшая школа, 1986.
7. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. - М.: Просвещение, 1990.
8. Задачи по математике. Уравнения и неравенства (справочное пособие). - М.: Наука, 1957.
9. Кутепов А.К., Фубанов А.Г. Задачник по алгебре и элементарным функциям. - М.: Высшая школа, 1969.
10. Ляпин С.Е. Методика преподавания математики, часть 2. - М.: Учпедгиз, 1956.
11. Садовничий Ю.В. Алгебра. конкурсные задачи с решениями: учебное пособие. - М.: Издательство «Экзамен». - 2007.
12. Система тренировочных задач и упражнения по математике. - М.: Просвещение, 1991.
13. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Домашний репетитор. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. - М., 1997.
14. Ястребеницкий Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. - М.: Просвещение, 1971.
15. Школьные учебники по математике.
16. Газета «Математика».
17. Журнал «Математика в школе».